ESPE de Paris
Université Paris Diderot
Université Pierre et Marie Curie **2014 - 2015**
Master MEEF première année
Fabrice Vandebrouck, vandebro@univ-paris-diderot.fr
Francoise Hérault, francoise.herault@espe-paris.fr

Suites numériques, deuxième partie

Dans tout ce qui suit on considère des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs réelles, c'est-à-dire des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout entier naturel (ou *rang*) n le réel u_n est appelé un *terme* de la suite. Plus généralement, une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et on la notera alors $(u_n)_{n\geq n_0}$. Les définitions et les résultats ci-dessous se généralisent sans difficulté aux suites à valeurs complexes **tant qu'ils ne font pas intervenir la relation d'ordre entre les termes, comme par exemple la monotonie**.

1 Rappel des définitions et des théorèmes principaux

Les définitions de cette section ont déjà été manipulées dans le chapitre 1 dans le cas de suites de nombres rationnels (en particulier pour la construction de $\mathbb{R}$ proposée par Cauchy). Les premières propositions portant sur les limites de suites seraient valables aussi pour des suites de nombres rationnels et elles ne mettent pas en jeu les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$.

Définition 1.1. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $N \geq n_0$ tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq N$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Dans ce cas, le réel ℓ est unique et est appelé la limite de $(u_n)_{n\geq n_0}$. On peut écrire :

$$\lim_{n+\infty} u_n = \ell\,.$$

Les inégalités ci-dessus peuvent être indifféremment larges ou strictes, mis à part $\varepsilon > 0$. Lorsqu'une suite ne converge pas, on dit qu'elle est *divergente*.

Proposition 1.2. Toute suite convergente est bornée.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers une limite $\ell > 0$. Peut-on dire que les termes de la suite sont strictement positifs à partir d'un certain rang ?

Exercice 2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} U_{n+1} - U_n = 0$, peut-on dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

Exercice 3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\lim\limits_{n\to\infty} nU_n = 1$, peut-on dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ?

Exercice 4. Suites, logique et quantificateurs

On considère une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $V_n = \dfrac{-2}{U_n}$. Statuer sur les propositions suivantes :

1. Si (U_n) converge alors (V_n) converge
2. Si (U_n) est minorée par 2 alors (V_n) est minorée par -1
3. Si (U_n) est décroissante alors (V_n) est croissante
4. Si (U_n) est divergente alors (V_n) converge vers 0

Exercice 5. Théorème de Cesàro
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \ .$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers ℓ.

Définition 1.3. La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout réel A, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que pour tout entier n vérifiant $n \geq N$, on a $u_n \geq A$ (resp. $u_n \leq A$).

Une suite tendant vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est donc non bornée, mais la réciproque est bien sûr fausse ! Par contre, la proposition précédente montre qu'elle ne converge pas, et on dit parfois pour souligner ce point qu'elle *diverge* vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Les règles de calcul sur les limites seront supposées connues **en prenant garde aux formes indéterminées** ! On a également le résultat général suivant :

Théorème 1.4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Si la suite (u_n) à valeurs dans A converge vers $\ell \in A$, alors la suite $(v_n) = \big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(\ell)$.

On a ensuite un certain nombre de résultats qui ne sont pas de nature algébrique et qui permettent de justifier des convergences et/ou déterminer des limites.

Proposition 1.5. Si les suite (u_n) et (v_n) vérifient : $u_n \leq v_n$ pour tout rang n et **si elles sont toutes les deux convergentes**, alors on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leq \lim_{n\to+\infty} v_n \ .$$

Si on a de plus : $u_n < v_n$ pour tout rang n, on obtient uniquement l'**inégalité large** en passant à la limite (exercice : donner un contre-exemple à l'inégalité stricte), et il ne faut surtout pas confondre ce résultat avec le théorème suivant, qui montre lui la convergence :

Théorème 1.6. ("Théorème des gendarmes")
Si la suite (u_n) est encadrée par deux suites convergentes de même limite $\ell \in \mathbb{R}$, alors elle converge aussi vers ℓ.

Exercice 6. Ecrire avec des quantificateurs et des connecteurs logiques les énoncés : "la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est convergente" et "la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est divergente".

Exercice 7. Donnez les variations et la limite éventuelle des suites suivantes. Les opérations sur les limites suffisent-elles toujours pour déterminer la convergence ? On s'interrogera sur l'intérêt de proposer ces suites à des élèves, les adaptions à faire, les énoncés à rédiger compte tenu des programmes d'enseignement. Selon les cas, l'entier n est supérieur strict ou non à 0.

1. $x_n = \frac{1}{n}$
2. $y_n = q^n \quad \text{avec} \quad q \in \mathbb{R}$
3. $U_n = n^\alpha \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
4. $V_n = n!$
5. $W_n = 3n^2 + n - 5$
6. $R_n = n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
7. $S_n = \dfrac{\cos(n)}{n}$

Définition 1.7. La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite de Cauchy si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que pour tous entiers p et q vérifiant $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $|u_p - u_q| < \varepsilon$.

Proposition 1.8. Toute suite de Cauchy est bornée.

Dans la suite, les théorèmes de base sur les suites numériques se montrent ici en utilisant la propriété fondamentale de $\mathbb{R}$: toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée possède une borne supérieure. L'ordre dans lequel on énonce les théorèmes permet de varier les preuves possibles, en s'appuyant à chaque fois sur ce qui a ou n'a pas été démontré. Voici un ordre possible. Des éléments de preuves pour le premier et le troisième théorème qui suivent ont déjà été vus au chapitre 1 :

Théorème 1.9. Toute suite réelle croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente, et sa limite est la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble de ses termes. Toute suite réelle croissante non majorée (resp. décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$).

Théorème 1.10. Une suite numérique converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Démonstration 1. On donne ici une idée pour montrer que la condition est suffisante. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite de Cauchy. On sait déjà qu'elle est bornée donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{u_p, p \geq n\}$ est non vide et majoré. On définit la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ où $a_n = \sup\{u_p, p \geq n\}$. La suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante, minorée donc convergente. On note ℓ sa limite et on peut montrer que $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ. En effet, si on se donne un $\epsilon > 0$, il exite N_1 tel que pour tout n et p supérieurs à N_1, on a $|u_n - u_p| \leq \epsilon$. Pour tout $n \geq N_1$, on a également $|a_n - u_n| \leq \epsilon$. Enfin il existe N_2 tel que pour tout $n \geq N_2$, $|a_n - \ell| \leq \epsilon$. Donc pour $n \geq \max\{N_1, N_2\}$, on est assuré que $|u_n - \ell| \leq 3\epsilon$, ce qui suffit pour prouver que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers ℓ.

Remarque 1.11. On traduit ce théorème en disant que $\mathbb{R}$ est complet.

Définition 1.12. Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est décroissante et :

$$\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0 .$$

Ceci implique (exercice pour la classe de terminale!) que pour tout rang n, on a : $u_n \leq v_n$.

Théorème 1.13. Si les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, elles convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout rang n, on a :

$$u_n \leq \ell \leq v_n .$$

Exercice 8. Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie non vide et majorée : on pose $\alpha = \sup(A)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α. On suppose que $\alpha \notin A$, montrer alors qu'il existe une suite strictement croissante $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers α.

2 Suites arithmétiques, géométriques et puissances

Suite arithmétique : elle vérifie la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où r est un réel fixé appelé la *raison* de la suite. On montre par récurrence que $u_n = u_0 + r\, n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc si $r = 0$ elle est constante, et sinon on a suivant le signe de r :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty .$$

Suite géométrique : c'est une suite vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = r\, u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où r est un réel fixé également appelé la *raison* de la suite. On montre par récurrence que $u_n = u_0\, r^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc :

- si $r = 1$ elle est constante, donc converge vers u_0
- si $r < 1$ ou si $u_0 = 0$, elle converge vers 0
- si $u_0 \neq 0$ et $r \leq -1$, elle n'admet pas de limite (réelle ou infinie)
- si $u_0 \neq 0$ et $r > 1$, on a suivant le signe de u_0 :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty .$$

Exercice 9. (d'après Terracher Terminale S) 1) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0, +\infty[$ on a

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \quad \text{(inégalité de Bernouilli).}$$

2) En déduire que si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.
3) A l'aide d'un théorème de comparaison, en déduire la limite de q^n lorsque $-1 < q < 1$.

Exercice 10. Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites arithmétiques (respectivement géométriques) que peut-on dire de la suite $(U_n + V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (respectivement $(U_n \times V_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Suite puissance : c'est une suite de la forme $u_n = n^\alpha$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, où α est un réel fixé appelé la *puissance* de la suite.
Pour $\alpha > 0$, la suite est divergente vers $+\infty$.
Pour $\alpha = 0$, la suite est constante égale à 1.
Pour $\alpha < 0$, la suite est convergente vers 0.

Exercice 11. Etudier les croissances comparées en fonction des raisons et des puissances des suites géométriques et des suites puissances. On pourra également comparer avec la suite des factorielles $u_n = n!$. Quels résultats avec quelles démonstrations peut-on proposer au niveau du lycée ?

Exercice 12. Soit $(u_n)_{n\in}$ une suite de nombres réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $a \in [0 + \infty]$ tel que :

$$\lim_{n+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a \ .$$

1) On suppose que $a > 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2) On suppose que $a < 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3) Montrer par des exemples que si $a = 1$, on ne peut pas conclure.

3 Suites arithmético géométriques, suites récurrentes linéaires

Exercice 13. Soient k et r deux réels avec $k \neq 1$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence : $u_{n+1} = k\ u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique réel a tel que : $a = k\ a + r$ et, en considérant la suite auxiliaire définie par : $v_n = u_n - a$, exprimer u_n en fonction de k, r et n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire le comportement de (u_n) en fonction de k, r et u_0. Quels scénarios peut-on proposer en classe de terminale S autour de cet exercice ?

Exercice 14. Etudier les suites définies de la façon suivante (comportement, convergence, expression éventuelle explicite en fonction de n) :

1. $2U_{n+1} = U_n - 1 \quad U_0 = 1$
2. $T_n = T_{n-1} + \dfrac{1}{2^n} \quad T_0 = 0$ (paradoxe de Zénon)
3. $R_{n+1} = \dfrac{1}{3}R_n + n - 1 \quad R_0 = 1$
4. $S_{n+1} = 3S_n - 2n + 3 \quad S_0 = 0$ (sujet oral 2, 2013)
5. $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}X_n + \dfrac{1}{2^n}$ (oral 2, 2007)
6. Différentes suites de Fibonacci...
7. $V_{n+2} = \dfrac{3}{35}V_{n+1} + \dfrac{2}{35}V_n \quad V_0 = 3 \quad V_1 = -\dfrac{4}{35}$
8. $W_{n+1} = 4W_n - W_{n-1} \quad W_0 = 2 \quad W_1 = 4$

9. $U_{n+1} = U_n + \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$

On pourra également s'interroger sur l'intérêt de proposer ces suites à des élèves, les adaptions à faire, les énoncés à rédiger compte tenu des programmes d'enseignement. Selon les cas, l'entier n est supérieur strict ou non à 0.

Exercice 15. Suites classiques et TICE

1. Suites des sommes d'entiers, de carrés d'entiers, de cubes d'entiers...
2. $\mathrm{U}_n = n + 4\sin(n) Suites des aires et primtres des Flocons de Von Koch$
3. $U_0 = 1 \quad U_1 = k \in \mathbb{R} \quad U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$ - on pourra notamment prendre $k = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ puis un $k' = k + \epsilon$ et étudier la stabilité du comportement.
4. $V_{n+1} = V_n + 2n - 11$ (épreuve pratique baccalauréat, 2009)
5. Suites des intérets, amortissements, capital restant du...

4 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 4.1. Le réel ℓ est appelé une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si pour tout réel $\varepsilon > 0$ et tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe un rang $n > N$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

Remarque 4.2. Remarquez bien le quantificateur existentiel et non universel qui distingue la définition d'une limite et d'une valeur d'adhérence. Ecrire avec des quantificateurs et des connecteurs logiques les énoncés : "la suite (u_n) converge vers ℓ" et "la suite (u_n) admet ℓ comme valeur d'adhérence". Laquelle des deux propriétés implique l'autre ?

Définition 4.3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Proposition 4.4. Le réel ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers ℓ.

Proposition 4.5. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers ℓ.

Exercice 16. - Montrer que si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors la suite $(u_n)_{n\in}$ converge vers ℓ.
- Est ce que si deux suites extraites d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite ℓ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ ?

Théorème 4.6. (Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente.

Remarque 4.7. : c'est une autre propriété caractéristique (ou caractérisation possible) de l'ensemble des réels. Ce n'est pas vrai sur $\mathbb{Q}$ notamment.

Remarque 4.8. : Dans le langage des espaces métriques, cela signifie que tout *segment* (c'est à dire intervalle fermé et borné) de $\mathbb{R}$ est *compact*.

Exercice 17. Soient $a_0 < b_0$ deux réels et soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle telle que :

$$a_0 \leq u_n \leq b_0 \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0 \quad .$$

On pose : $$E_0^- = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\; n > n_0 \;\; a_0 \leq u_n \leq \tfrac{a_0+b_0}{2} \right\} \quad \text{et :}$$

$$E_0^+ = \left\{ n \in \;\; n > n_0 \;\; \frac{a_0+b_0}{2} \leq u_n \leq b_0 \right\} \quad .$$

Montrer que l'un des deux ensembles E_0^- ou E_0^+ est infini.
Si E_0^- est infini, on pose $a_1 = a_0$, $b_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$ et $E_1 = E_0^-$, et sinon on pose $a_1 = \dfrac{a_0+b_0}{2}$, $b_1 = b_0$ et $E_1 = E_0^+$.
Montrer par récurrence qu'on peut ainsi construire deux suites réelles $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et une suite d'entiers $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telles que : $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, $(n_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et pour tout entier naturel p on a : $b_{p+1} - a_{p+1} = \frac{b_p-a_p}{2}$ et l'ensemble $E_{p+1} = \left\{ n \in \mathbb{N} \;\; n > n_p \;\; a_{p+1} \leq u_n \leq b_{p+1} \right\}$ est infini.
Montrer que les suites $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ et que

$$\lim_{p\to+\infty} u_{n_p} = \ell \ .$$

En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 18. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que l'ensemble $A = \{\, u_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est fini.
Montrer que la suite (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.
Pour tout $x \in A$ on pose : $V_x = \{\, n \in \mathbb{N} \; u_n = x\,\}$. Montrer qu'un réel ℓ est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si et seulement si $\ell \in A$ et l'ensemble V_ℓ est infini.

Exercice 19. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que (u_n) converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence *(on pourra raisonner par l'absurde)*. Est-ce vrai si on ne suppose pas (u_n) bornée ?

5 Etude des suites récurrentes (non linéaires) et théorème du point fixe

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que $f(I) \subset I$ (on dit que I est *stable* par f).

En choisissant un premier terme $u_0 \in I$, on peut donc définir une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (pour le cas où on ne suppose pas I stable par f, on pourra consulter la première épreuve du CAPES 1998). On dit que la suite récurrente est associée à la fonction f.

Remarque 5.1. il faut bien distinguer le traitement des suites définies explicitement à l'aide d'une fonction, de la forme $u_n = f(n)$ des suites récurrentes associées à une fonction. En particulier, ici la croissance de f n'entraine pas la croissance de la suite, ce qui est une erreur classique des élèves.

Théorème 5.2. Si la fonction f est croissante, la suite (u_n) est monotone. Elle est croissante si $u_1 - u_0$ est positif, décroissante sinon.
Si f est décroissante, les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, l'une est croissante et l'autre est décroissante.

Théorème 5.3. Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue au point ℓ, alors on a : $f(\ell) = \ell$, c'est à dire que ℓ est un point fixe de f.

Remarque 5.4. Si f est continue et décroissante, l'étude des points fixes de $f \circ f$ permet de déterminer les limites éventuelles des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Si on montre qu'elles sont adjacentes, on en conclut que la suite (u_n) est convergente.

Définition 5.5. S'il existe un réel $k \geq 0$ tel que : $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ pour tous $x, y \in I$, on dit que f est lipschitzienne de rapport k. Une fonction lipschitzienne de rapport $k < 1$ est dite contractante.

Cela implique que f est (uniformément) continue sur I, et si f est de plus dérivable, la façon la plus simple de montrer que f est k-lipschitzienne est d'utiliser le théorème des accroissements finis en montrant que pour tout $x \in I$, on a : $|f'(x)| \leq k$. Un résultat fondamental en analyse est le théorème suivant.

Théorème 5.6. Théorème du point fixe Si $I = [a, b]$ est un segment et si f est continue, alors f admet au moins un point fixe. Si de plus f est contractante, ce point fixe est unique et toute suite récurrente associée à f converge vers ce point fixe.

Vitesse de convergence.

Supposons que f est de classe C^1 et que α est un point fixe de f.

- Si on a : $|f'(\alpha)| < 1$, la continuité de f' et le théorème des accroissements finis permettent de montrer qu'il existe un segment non trivial J centré en α sur lequel f est contractante, et le théorème du point fixe montre que si $u_0 \in J$, la suite (u_n) converge vers α : on dit que α est un *point fixe attractif* et que la suite (u_n) converge vers α de façon *géométrique*.

- Si on a : $|f'(\alpha)| > 1$, on montre de même qu'il existe un réel $k > 1$ et un segment non trivial J centré en α tels que $|f(x) - f(y)| \geq k|x - y|$ pour tous $x, y \in I$, ce qui permet de montrer (par l'absurde) que la suite (u_n) ne peut converger vers α que si $u_0 = \alpha$, auquel cas elle est constante. On dit dans ce cas que α est un *point fixe répulsif*.

- Si on a : $|f'(\alpha)| = 1$, on ne peut pas conclure comme le montre l'exemple suivant.

Exercice 20. Montrer que toute suite (u_n) définie par $u_0 \in [0, \pi]$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente, alors que toute suite (v_n) définie par $v_0 > 0$ et $v_{n+1} = \sinh(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est divergente.

- Si f est de classe C^2 et $f'(\alpha) = 0$, on se trouve dans le cas particulier important d'un *point fixe superattractif*. La continuité de f'' et la formule de Taylor-Lagrange permettent de montrer qu'il existe un réel $k \geq 0$ et un segment non trivial J centré en α et stable par f tels que : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|^2$ pour tous $x, y \in J$.
Si $u_0 \in J$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|^2.$$

Exercice 21. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{k}\big(k|u_0 - \alpha|\big)^{2^n}.$$

Dans ce cas, la convergence de (u_n) vers α est beaucoup plus rapide que la simple convergence géométrique, et on parle de *convergence quadratique*. C'est en particulier le cas quand on applique la *méthode de Newton* (basée sur l'approximation d'une courbe par ses tangentes, on y reviendra) à la résolution de l'équation $h(x) = 0$ quand h est de classe C^3.

Exercice 22. Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron (voir aussi le point de vue historique).

Soient a et r deux réels strictement positifs.

Montrer qu'on peut définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Montrer que cette suite est la suite obtenue en appliquant la méthode de Newton pour la résolution de l'équation $x^2 - a = 0$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2\,u_n}\left(u_n - \sqrt{a}\right)^2.$$

On choisit $a = r = 2$: montrer que (u_n) est une suite de Cauchy de rationnels mais qu'elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)^{2^n}.$$

Combien de termes de cette suite suffit-il de calculer pour obtenir les 10 premières décimales du nombre $\sqrt{2}$? Les 100 premières décimales ?

Exercice 23. examen de rattrapage 2013/2014, algorithme de Babylone

Question préliminaire : on considère un rectangle de longueur L_0 et de largeur l_0 (avec $0 \leq l_0 \leq L_0$). Quelle est la largeur l_1 d'un rectangle de même aire et dont la longueur est $L_1 = \dfrac{L_0 + l_0}{2}$?

On prend $L_0 = 2$ et $l_0 = 1$. On initie et on continue le procédé décrit ci-dessus et on forme ainsi une suite de rectangles de longueur L_n , de largeur l_n et d'aire 2 .

Calculer les longueurs et les largeurs des trois premiers rectangles et dessiner ces trois rectangles.

Justifier géométriquement que pour tout $n \in$ on a : $\quad 0 \leq l_n \leq l_{n+1} \leq L_{n+1} \leq L_n$.

Quelle est la "figure limite" de la suite des rectangles lorsque n tend vers l'infini ?

Montrer que la suite $(L_n)_{n\in}$ est définie analytiquement par la relation de récurrence :

$$L_{n+1} = \frac{1}{2}\left(L_n + \frac{2}{L_n}\right) \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Montrer analytiquement que $(L_n)_{n\in}$ est une suite de rationnels qui converge vers $\sqrt{2}$. La réponse est-elle cohérente avec votre réponse à la question sur la figure limite ?

Expliquer pourquoi il peut être intéressant avec des élèves de traiter le problème à la fois dans le cadre géométrique et dans le cadre analytique.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad L_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(L_n - \sqrt{2}\,)^2}{2\,L_n} \quad .$

En déduire que pour tout $n \in$, on a : $\quad 0 < L_n - \sqrt{2} \leq 2\,\sqrt{2}\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\,\sqrt{2}}\right)^{2^n} \quad .$

Combien de termes de la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suffit-il de calculer pour obtenir les 100 premières décimales de $\sqrt{2}$?