Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2014-2015

Chapitre 4 : Intégration sur un segment

1 Propriétés générales

Pour la définition des fonctions *intégrables au sens de Riemann* et de leurs intégrales on pourra consulter le polycopié, en notant que seul le cas des fonctions continues par morceaux figure au programme du CAPES. Tous les résultats qui suivent sont énoncés pour les fonction à valeurs réelles, mais leur généralisation aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ ne pose aucun problème tant qu'ils ne font pas intervenir d'inégalités.

Définition 1 *Soient $a < b$ deux réels. On appelle* subdivision du segment $[\,a\,,\,b\,]$ *toute suite finie $(x_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ telle que :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\ .$$

Le réel $\sigma(x) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1} - x_k)$ est appelé le pas de la subdivision. *Pour toute fonction $f\,:\,[\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$, on appelle* somme de Riemann *associée à cette subdivision toute somme :*

$$S_{x\,,\,c}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f_k(c_k)$$

où $c_k \in [\,x_k\,,\,x_{k+1}\,]$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Définition 2 *Une fonction $f\,:\,[\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est dite* continue par morceaux *s'il existe une subdivision $(y_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, de $[\,a\,,\,b\,]$ dite* adaptée à f, *et pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$ une fonction continue $f_k\,:\,[\,y_k\,,\,y_{k+1}\,] \to \mathbb{R}$ telle que :*

$$f(x) = f_k(x) \qquad \text{pour tout } x \in\,]\,y_k\,,\,y_{k+1}\,[\ .$$

Théorème 1 Sommes de Riemann. *Si $f\,:\,[\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, on a :*

$$\lim_{\sigma(x)\to 0} S_{x\,,\,c}(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$

où la limite est prise sur l'ensemble des subdivisions de $[\,a\,,\,b\,]$ dont le pas tend vers 0.

Proposition 1 Relation de Chasles. *Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle et si $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux, alors pour tous $a\,,\,b\,,\,c \in I$, on a :*

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt\ .$$

Proposition 2 Linéarité de l'intégrale. *Si les fonctions $f\,,\,g\,:\,I \to \mathbb{R}$ sont continues par morceaux, si $a\,,\,b \in I$ et si $\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_a^b \big(\lambda\, f(t) + \mu\, g(t)\big)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt\ .$$

Proposition 3 Continuité de l'intégrale. *Si $f\,:\,I \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux et si $a \in I$, la fonction $F\,:\,I \to \mathbb{R}$ définie par :*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue.

Proposition 4 Positivité de l'intégrale. *Si* $a \leqslant b$ *et si* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux et vérifie :* $f(t) \geqslant 0$ *pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,]$*, alors on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt \ \geqslant 0\ .$$

On en déduit que si $a \leqslant b$ et si $f\,,\,g\ :\ [a\,,\,b] \to \mathbb{R}$ vérifient : $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a\,,\,b]$, alors on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt \ \leqslant\ \int_a^b g(t)\,dt\ .$$

Corollaire 1 Inégalité triangulaire. *Si* $a \leqslant b$ *et si* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est continue par morceaux, alors on a :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \ \leqslant \int_a^b |\,f(t)\,|\ dt\ .$$

Corollaire 2 Inégalité de la moyenne. *Si* $a \leqslant b$ *et si* $f\,,\,g\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *sont continues par morceaux, alors on a :*

$$\left|\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt\right| \ \leqslant \sup_{[a\,,\,b]} |\,f\,| \ \int_a^b |\,g(t)\,|\ dt\ .$$

2 Cas des fonctions continues

Théorème 2 Intégrales et primitives. *Si la fonction* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **continue**, *la fonction* $H\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *définie par :*

$$H(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable et vérifie : $H' = f$.

Exercice 1 Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que la fonction f est continue par morceaux.

Corollaire 3 *Si* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est continue et si* $F\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f, *c'est à dire vérifie* $F' = f$, *alors on on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)\ .$$

Corollaire 4 *Si la fonction* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **de classe** C^1, *on a :*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt\ .$$

Exercice 2 Démontrer ces corollaires.

Pour calculer l'intégrale d'une fonction continue par morceaux, on peut cependant utiliser la relation de Chasles pour obtenir avec les notations de la définition 2 :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f_k(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \ F_k(y_{k+1}) - F_k(y_k)$$

où F_k est une primitive de la fonction continue f_k pour chaque $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

Proposition 5 *Si* $f\ :\ [\,a\,,\,b\,] \to \mathbb{R}$ *est* **continue** *et vérifie :* $f(t) \geqslant 0$ *pour tout* $t \in [\,a\,,\,b\,]$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\ = 0$, *alors on a :* $f = 0$.

Exercice 3 Montrer que ce résultat est faux si on suppose seulement que la fonction f est continue par morceaux. Le démontrer.

3 Calcul des primitives

Proposition 6 Changement de variable. *Si* $\varphi\ :\ [\,a\ ,\ b\,] \to \mathbb{R}$ *est de classe* C^1 *et si* f *est continue sur le segment* $\varphi([\,a\ ,\ b\,])$, *alors on a :*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt = \int_a^b f(\varphi(s))\,\varphi'(s)\,ds\ .$$

Proposition 7 Intégration par parties. *Si* $u\,,\ v\ :\ [\,a\ ,\ b\,] \to \mathbb{R}$ *sont de classe* C^1 , *on a :*

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,dt = [u(t)\,v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,dt\ .$$

Exercice 4 Démontrer ces propositions.

4 Exercices

Exercice 5 Soit p un entier naturel. En utilisant une somme de Riemann, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{p+1}} \sum_{k=1}^{n} k^p\ .$$

Exercice 6 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t\,(\ln^2 t+1)}$.

Exercice 7 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,dt$.

Exercice 8 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\ \cos^3(x)\,dx$.

Exercice 9 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1+2\sin(x)}\,dx$.

Exercice 10 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,dx$.

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{x^2+2\,x+2}\,dx$.

Exercice 12 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$.

Exercice 13 Soient a un réel positif et $f\ :\ [-a\ ,\ a] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Montrer que si f est impaire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0$ et que si f est paire : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.

Exercice 14 Soient T un réel strictement positif et $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux et T-périodique. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,dt$ ne dépend pas du réel a .

Exercice 15 Lemme de Riemann-Lebesgue. Soit $f\ :\ [a\ ,\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Montrer que :

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int_a^b f(t)\ \sin(\lambda\,t)\,dt = 0\ .$$

Exercice 16 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \ell$.

Exercice 17 Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_a^b (f(t))^n\,dt\right)^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Exercice 18 **Intégrales de Wallis.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,dt \quad .$$

a) Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
b) En intégrant par parties, trouver une relation entre W_{n+2} et W_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis en déduire une expression de W_n en fonction de n.
c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\quad W_n\,W_{n+1} = \dfrac{\pi}{2\,(n+1)}$.
d) Montrer que $W_{n+1} \sim W_n$ (*on pourra utiliser les questions* **a** *et* **b**).
e) Montrer que : $W_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2\,n}}$. En déduire la limite de $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.