Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2014-2015

Chapitre 5 : Comparaison des suites et des fonctions

1 Comparaison des suites

Définition 1 Notations de Landau *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.*

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dominée par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit $u_n = O(v_n)$ s'il existe un entier naturel N et une constante réelle $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$|u_n| \leqslant C\ |v_n| \quad \text{pour tout entier } n \geqslant N\ .$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit $u_n = o(v_n)$ (ou parfois : $u_n \ll v_n$) s'il existe un entier naturel N et une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ vérifiant :

$$u_n = \varepsilon_n\, v_n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant N \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0\ .$$

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on écrit $u_n \sim v_n$ s'il existe un entier naturel N et une suite réelle $(\varepsilon_n)_{n\geqslant N}$ vérifiant :

$$u_n = (1+\varepsilon_n)\, v_n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant N \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0\ .$$

Exercice 1 a) Qu'impliquent ces définitions si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite nulle ?
b) Que deviennent ces définitions si on suppose que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Proposition 1 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- On a : $u_n = O(v_n)$ si et seulement si : $|u_n| = O(|v_n|)$.
- On a : $u_n = o(v_n)$ si et seulement si : $|u_n| = o(|v_n|)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors : $u_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors : $u_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors : $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(v_n)$, alors : $\lambda\, u_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$, alors : $\lambda\, u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors : $u_n + v_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors : $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(x_n)$, alors : $u_n\, v_n = O(w_n\, x_n)$.
- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors : $u_n\, v_n = o(w_n\, x_n)$.

Ces règles de calculs ne sont pas exhaustives, et en cas de doutes on reviendra toujours (au moins mentalement) à la définition.

Proposition 2 Croissances comparées *Pour tous réels $\alpha > 1$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ on a :*

$$\alpha^{-n} \ll n^{-\beta} \ll (\ln n)^{-\gamma} \ll 1 \ll (\ln n)^{\gamma} \ll n^{\beta} \ll \alpha^{n}\,.$$

Proposition 3 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.*

- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors : $v_n \sim u_n$ et $u_n \sim w_n$.
- Si $u_n \sim v_n$, alors : $|u_n| \sim |v_n|$, $\lambda\, u_n \sim \lambda\, v_n$, $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\,,\,+\infty\}$, alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$ **et si on a :** *$\ell \neq 0$, alors : $u_n \sim \ell$.*
- Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim x_n$, alors $u_n\, v_n \sim w_n\, x_n$.
- Si $u_n \sim v_n$ et s'il existe un entier N tel que : $u_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant N$, alors il existe un entier M tel que : $v_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant M$ et on a : $\dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$.

On peut donc multiplier les équivalents, les diviser quand ils sont non nuls, mais **on ne peut pas les additionner** puisqu'en posant $u_n = 1 + \dfrac{1}{n} \sim 1$ et $v_n = -1$ pour tout $n \geqslant 1$, $u_n + v_n = \dfrac{1}{n}$ n'est pas équivalent à $1 - 1 = 0$! Par contre, le résultat suivant permet souvent de se ramener aux règles d'addition pour les o.

Proposition 4 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On a : $u_n \sim v_n$ si et seulement si : $u_n - v_n = o(v_n)$, c'est à dire si : $u_n = v_n + o(v_n)$, ou encore : $v_n = u_n + o(u_n)$.*

Ainsi, si on a : $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim w_n$, on obtient : $u_n = w_n + o(w_n)$ et $v_n = w_n + o(w_n)$, donc : $u_n + v_n = 2\,w_n + o(w_n)$ et finalement : $u_n + v_n \sim 2\,w_n$, mais : $u_n - v_n = o(w_n)$.

Exercice 2 Déterminer la limite des suites définies par :

$$a_n = \frac{2^n + n^3}{3^n - \ln(n)} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{n^2 + \ln(n)}{n^2 + e^{-n} + (-1)^n\, n} \; .$$

Exercice 3 Soit $(a\,,\,b\,,\,c) \in \mathbb{R}^3$: déterminer en fonction de a, b et c un équivalent le plus simple possible de :

$$u_n = \frac{a}{n^2+1} + b^n + c\,\ln n\,.$$

Exercice 4 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives telles que $u_n \sim v_n$.
a) A-t-on toujours $e^{u_n} \sim e^{v_n}$? A-t-on toujours $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$ si $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$?
b) Montrer qu'on a : $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$.

Exercice 5 Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles vérifiant :

$$u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

On suppose que $w_n \sim u_n$: montrer que $v_n \sim u_n$.

2 Comparaison des fonctions

Définition 2 *Soit $a \in \mathbb{R}$: un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $]\,a-\delta\,,\,a+\delta\,[\, \subset V$. Si $b > a$, un ensemble $V \subset\,]\,a\,,\,b\,[$ est un voisinage de a* **dans** *$]\,a\,,\,b\,[$ (parfois appelé voisinage à droite) s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $]\,a\,,\,a+\delta\,[\, \subset V$.*

Définition 3 *Un ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) s'il existe un réel c tel que $]\,c\,,\,+\infty\,[\, \subset V$ (resp. $]-\infty\,,\,c\,[\, \subset V$).*

Définition 4 *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ et soient f et g deux fonctions réelles toutes les deux définies sur $V \setminus \{a\}$ où V est un voisinage de a.*

- On dit que f est dominée par g et on écrit $f(x) = O(g(x))$ quand x tend vers a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une constante $C \geqslant 0$ vérifiant :

$$|\,f(x)\,| \leqslant C\;\; |\,g(x)\,| \quad \textit{pour tout } x \in V' \setminus \{a\}\;.$$

- On dit que f est négligeable devant g et on écrit $f(x) = o(g(x))$ (ou parfois $f(x) \ll g(x)$) quand x tend vers a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une fonction $\varepsilon\,:\,V' \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x) \;=\; \varepsilon(x)\,g(x) \quad \textit{pour tout } x \in V' \setminus \{a\} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\,.$$

- On dit que f est équivalente à g et on écrit $f(x) \sim g(x)$ quand x tend vers a s'il existe un voisinage $V' \subset V$ de a et une fonction $\varepsilon\,:\,V' \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x) \;=\; \big(1 + \varepsilon(x)\big)\,g(x) \quad \textit{pour tout } x \in V' \setminus \{a\} \qquad \textit{et} \qquad \lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0\,,$$

ce qui équivaut à : $f = g + o(g)$ au voisinage de a.

Les règles de calcul énoncées pour les suites s'appliquent également aux fonctions.

Proposition 5 Croissances comparées *Pour tout réel $\alpha > 0$ on a :*

$$1 \ll \ln(x) \ll x^\alpha \ll e^x \qquad \textit{quand } x \textit{ tend vers } +\infty$$

ainsi que : $\qquad \ln(x) = o(x^{-\alpha}) \qquad$ *quand x tend vers 0^+ .*

Exercice 6 Écrire avec les notations de Landau les propriétés suivantes.
a) f est bornée au voisinage de a .
b) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.
c) f est dérivable au point $a \in \mathbb{R}$.

3 Formules de Taylor

Par ordre croissant de régularité, on a les trois théorèmes suivants.

Théorème 1 Formule de Taylor-Young. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit a un point de I et soit n un entier naturel. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est n fois dérivable au point a , on a pour tout x au voisinage de a :*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big) \;.$$

Théorème 2 Formule de Taylor-Lagrange. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soient $a < b$ deux point de I et soit n un entier naturel non nul. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^{n-1} sur I et n fois dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$, alors il existe un point $c \in]\,a\,,\,b\,[$ tel que :*

$$f(b) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}}{k\,!}\,(b-a)^k + \frac{(b-a)^n}{n\,!}\,f^{(n)}(c) \;.$$

Théorème 3 Formule de Taylor avec reste intégral. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soient $a < b$ deux point de I et soit n un entier naturel non nul. Si la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe C^n sur I , alors on a :*

$$f(x) \;=\; \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}\,(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)\,!}\,f^{(n)}(t)\,dt \;.$$

La formule de Taylor avec reste intégral se démontre par récurrence en intégrant par parties et celle de Taylor-Young se démontre par récurrence en intégrant le développement limité de la fonction f' . Pour démontrer la formule de Taylor-Lagrange, on peut supposer $n \geqslant 2$ car le cas $n = 1$ n'est autre que le théorème des accroissements finis. Fixons un réel A et considérons la fonction $g : I \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) \;=\; f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!}\,(b-x)^k - \frac{(b-x)^n}{n\,!}\,A$$

qui est continue sur I , dérivable sur $]\,a\,,\,b\,[$ et vérifie : $g(b) = 0$. Pour tout $x \in]\,a\,,\,b\,[$, on a :

$$g'(x) \;=\; \big(A - f^{(n)}(x)\big)\,\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!}$$

et en choisissant l'unique réel A tel que $g(a) = 0$, le théorème de Rolle permet de conclure.

Exercice 7 Utiliser une formule de Taylor pour :
a) montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$,
b) développer le polynôme $P = X^3 - 9\,X^2 + 7\,X + 15$ suivant les puissances de $X - 2$,
c) calculer : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

4 Développements limités

Définition 5 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, soit a un point de I, soit n un entier naturel et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f admet un développement limité (D.L.) à l'ordre n en a s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$f(x) = P(x-a) + o\big((x-a)^n\big) \qquad \textit{au voisinage de } a\ .$$

Par translation, on peut toujours se ramener à un D.L. en 0 et on écrit usuellement :

$$f(a+h) = P(h) + o(h^n) \qquad \text{au voisinage de } 0\ .$$

Exercice 8 Montrer que s'il existe, le polynôme P est unique : on l'appelle la *partie principale* du développement.

Exercice 9 Que signifie pour une fonction d'avoir en un point un D.L. d'ordre 0 ? un D.L. d'ordre 1 ? On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et :

$$f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \qquad \text{si } x \neq 0\,.$$

Montrer que f admet un D.L. d'ordre 2 en 0 mais qu'elle n'est pas deux fois dérivable en 0.

Quand les dérivées successives de f sont faciles à calculer, la formule de Taylor-Young permet bien sûr d'obtenir le développement limité de f, mais son principal intérêt est en général de montrer son existence et pour le calculer on utilise la plupart du temps les formules ci-dessous et les développements usuels qui doivent être connus !

Définition 6 *Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est un polynôme de de degré inférieur ou égal à n et si $m \in \mathbb{N}$ vérifie $m \leqslant n$, la troncature de P à l'ordre m est le polynôme :*

$$T_m(P) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k\ .$$

Proposition 6 *Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0 de partie principale P, alors pour tout entier $m \leqslant n$ elle admet un développement limité à l'ordre m en 0 de partie principale $T_m(P)$.*

Proposition 7 *Soient f et g deux fonctions admettant en 0 des développements limités à l'ordre n de parties principales respectives P et Q, alors :*
- la fonction $f+g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de partie principale $P+Q$,
- la fonction $f\,g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 de partie principale $T_n(P\,Q)$,
- si $g(0) \neq 0$, la fonction $f\,g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 dont la partie principale est le quotient à l'ordre n de la division suivant les puissances croissantes de P par Q,
- si $g(0) = 0$, la fonction $f \circ g$ admet un D.L. à l'ordre n en 0 dont la partie principale est $T_n(P \circ Q)$,
- si f est continue au voisinage de 0, alors toute primitive de f admet un D.L. à l'ordre $n+1$ en 0 dont la partie principale est une primitive de P.

Par contre, **on ne peut pas dériver un DL** comme le montre l'exercice 9.

Définition 7 *On dit que f admet un développement limité au sens fort à l'ordre n en 0 s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que :*

$$f(x) = P(x) + O(x^{n+1}) \qquad \textit{au voisinage de } 0\ .$$

Un D.L. au sens fort est donc aussi un D.L. au sens usuel, mais cette notion permet souvent de gagner un ordre dans le calcul d'un D.L. sans calculer le terme suivant. En particulier, si f est $(n+1)$ fois dérivable en 0, la formule de Taylor-Young montre qu'elle admet un D.L. au sens fort à l'ordre n en 0. On peut de même gagner un ou plusieurs ordres quand les premiers termes d'un développement sont nuls en le factorisant : voir les exercices ci-dessous.

Proposition 8 Développements usuels. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de 0 :*

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + O(x^{n+1}) \quad , \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + O(x^{n+1}) \quad , \quad e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + O(x^{n+1}) \quad ,$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2\,k)!} + O(x^{2\,n+2}) \quad , \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\, x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + O(x^{2\,n+3}) \quad ,$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2\,k)!} + O(x^{2\,n+2}) \quad , \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2\,k+1)!} + O(x^{2\,n+3}) \quad ,$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\, x^k + O(x^{n+1}) \quad et \quad \arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2\,k+1}\, x^{2\,k+1} + O(x^{2\,n+3}) \quad .$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a au voisinage de 0 :

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k\,!}\, x^k + O(x^{n+1}) \quad .$$

Exercice 10 Démontrer cette proposition.

Exercice 11 Calculer les développements limités suivants.
a) Développement limité à l'ordre 4 en 0 de $x \mapsto \tan x$.
b) Développement limité à l'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$.
c) Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.
d) Développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{3}{x^2}}$.

Exercice 12 Calculer les limites suivantes.
a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3 + x^4}$.
b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{4x} - \dfrac{1}{2x(e^{\pi x}+1)}\right)$.
c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^{x \ln x}$.

Exercice 13 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.

a) Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement $\widetilde{f}$ est de classe C^1.
b) Montrer que $\widetilde{f}$ admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et le calculer. En admettant que la fonction $\widetilde{f}$ est de classe C^∞, en déduire les valeurs de ses dérivées en 0 jusqu'à l'ordre 3.

Exercice 14 Soit f la fonction réelle définie par $f(x) = x + \ln(1+x)$.
a) Montrer que la fonction f est une bijection de $]-1\,, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ et que la fonction f^{-1} est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer le développement limité de f^{-1} à l'ordre 3 en 0.

Exercice 15 Soient n un entier naturel non nul et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^{n+1}. Montrer que f' admet un développement limité à l'ordre n en 0, et qu'on l'obtient en dérivant le développement limité de f à l'ordre $n+1$ en 0. Généraliser.