Chapitre 6 : Séries numériques

1 Généralités

Définition 1 *Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n \geqslant n_0}$ définie par :*

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant n_0$$

et appelée les sommes partielles, et est notée $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$. **Lorsqu'elle converge**, *sa limite*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} S_n$$

est appelée la somme de la série. Dans ce cas, pour tout entier $n \geqslant n_0$ la série $\sum_{p \geqslant n+1} u_p$ est convergente et sa somme R_n est appelée le reste d'ordre n de la série, on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \textit{pour tout entier } n \geqslant n_0$$

et la suite $(R_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.

On a donc : $S_{n_0} = u_{n_0}$ et $S_n - S_{n-1} = u_n$ pour tout entier $n > n_0$, et réciproquement toute suite $(v_n)_{n \geqslant n_0}$ peut être considérée comme une série en posant $u_{n_0} = v_{n_0}$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$ pour tout entier $n > n_0$.

Proposition 1 *Si $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ convergent et si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n \geqslant n_0} (\lambda\, u_n + \mu\, v_n)$ converge et on a :*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda\, u_n + \mu\, v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \ .$$

Attention ! Si $\sum (u_n + v_n)$ converge, il faut vérifier la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avant d'écrire :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n \ .$$

Proposition 2 *Si la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ converge, la suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ converge vers 0.*

Quand $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ *diverge grossièrement.* Si la série converge, on a pour tout entier $n > n_0$ (*transformation d'Abel*) :

$$u_n = R_{n-1} - R_n \ .$$

Proposition 3 *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si : $|a| < 1$, et on a dans ce cas : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.*

2 Séries à termes positifs

Si on a : $u_n \geqslant 0$ pour tout entier n, la série $\sum u_n$ est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée, et si elle diverge elle tend vers $+\infty$. On en déduit le théorème de comparaison suivant.

Théorème 1 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles* **positives**. *On suppose qu'il existe un entier naturel $N \geqslant n_0$ tel que : $u_n \leqslant v_n$ pour tout entier $n \geqslant N$.*
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Corollaire 1 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites* **positives** *telles que : $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Théorème 2 *Soient $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites réelles* **positives** *telles que : $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Lorqu'elles convergent, leurs restes sont équivalents, et lorqu'elles divergent, leurs sommes parielles sont équivalentes.*

Exercice 1 Montrer que $\dfrac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que la série harmonique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge et qu'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a : $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n(n-1)}$ et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 4 Règle de Cauchy. *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle positive telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+ .$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 5 Règle de d'Alembert. *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle strictement positive telle que :*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+ .$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on ne peut pas conclure si $\ell = 1$ comme le montrent les exemples de $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Proposition 6 Critère de Riemann. *Pour tout réel α, la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.*

Exercice 3 Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t^\alpha}$$

et en déduire le critère de Riemann. Montrer que si $\alpha > 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} \quad .$$

Exercice 4 Développement décimal d'un nombre réel.
a) Soit $a_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite à valeurs dans $\{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,9\}$. Montrer que la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{10^n}$ est convergente. On note sa somme :

$$a_0\,,\,a_1\,a_2\,a_3\,\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad .$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} \;\leqslant\; a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots \;\leqslant\; \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

et que la deuxième inégalité est stricte sauf si on a : $a_k = 9$ pour tout entier $k \geqslant n+1$. Montrer que dans ce cas, le nombre $a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots$ est un nombre décimal, c'est à dire qu'il s'écrit : $10^{-N}\,p$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.
c) Soit x un nombre réel positif : on pose $a_0 = E(x)$ où E est la partie entière, et pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose : $a_n = E(10^n x) - 10\,E(10^{n-1}x)$. Montrer que $a_n \in \{0\,,\,1\,,\,\ldots\,,\,9\}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et qu'on a :

$$x \;=\; a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots$$

d) On reprend les notations du **c**. Montrer par l'absurde que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ comprend une infinité de termes différents de 9 : on appelle une telle écriture un développement décimal *propre* du réel positif x. Montrer qu'un tel développement décimal propre de x est unique.
Remarque : si $x < 0$, on obtient : $x = -a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots$ où $a_0\,,\,a_1\,a_2\,\ldots$ est le développement décimal propre de $-x$, et on obtient ainsi une suite de rationnels qui converge vers x, donc : $\mathbb{Q}$ *est dense dans* $\mathbb{R}$. Une propriété classique (voir l'UE *Nombres*) est que x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

3 Séries absolument convergentes

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} u_n$ converge absolument si la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant n_0} |\,u_n\,|$ converge.*

Théorème 3 *Toute série absolument convergente est convergente.*

Ceci permet d'appliquer les critères de la section précédente aux séries à termes de signe quelconque pour montrer leur convergence **absolue**.
Démonstration : la preuve classique utilise le critère de Cauchy (donc la complétude de $\mathbb{C}$) : la suite $(s_n)_{n\geqslant n_0}$ des sommes partielles de $\sum |\,u_n\,|$ converge, donc c'est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \geqslant n_0\,,\, q > p \geqslant N \Rightarrow |\, s_p - s_q\,| < \varepsilon \quad .$$

Mais en notant $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ on a pour tous entiers $q > p$:

$$|\, S_q - S_p\,| = \left|\, \sum_{n=p+1}^{q} u_n \,\right| \leqslant \sum_{n=p+1}^{q} |\,u_n\,| = s_q - s_p$$

donc $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ est aussi une suite de Cauchy, donc elle converge. Au niveau BTS (donc pour les séries à termes réels), on peut ramener cette preuve à la convergence des suites croissantes majorées (qui équivaut à la complétude de $\mathbb{R}$) en posant : $v_n = |\,u_n\,| - u_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$. On a donc : $0 \leqslant v_n \leqslant 2\ |\,u_n\,|$ pour tout entier $n \geqslant n_0$, donc $\sum v_n$ converge, mais on a aussi : $u_n = |\,u_n\,| - v_n$ pour tout entier $n \geqslant n_0$ et comme $\sum |\,u_n\,|$ et $\sum v_n$ convergent, on en déduit la convergence de $\sum u_n$.

Théorème 4 *Soient* $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes. Leur produit de Cauchy est la série de terme général* $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$ *, elle est absolument convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

4 Séries semi-convergentes

Théorème 5 Critère spécial des séries alternées *Soit* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *une suite réelle positive* **décroissante** *convergeant vers* 0 *. Alors la série de terme général* $(-1)^n u_n$ *est convergente, son reste* $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ *est du signe de* $(-1)^{n+1}$ *et :* $|\,R_n\,| \leqslant u_{n+1}$ *pour tout* $n \geqslant n_0$ *.*

Exercice 5 Démontrer ce théorème en montrant que les suites définies par :

$$a_n = \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k\, u_k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k\, u_k$$

sont adjacentes.

5 Familles sommables et séries doubles

Les résultats suivants figurent au programme du CAPES, mais seront vraisemblablement rappelés quand il s'agira de les utiliser. On retiendra qu'en cas de convergence **absolue**, on peut permuter ou regrouper les termes d'une série sans changer sa nature ni sa somme.

Théorème 6 *Si la série* $\sum u_n$ *est absolument convergente et si* $\sigma\, :\, \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une bijection, alors* $\sum u_{\sigma(n)}$ *est absolument convergente et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad .$$

Définition 3 *Soient* I *un ensemble dénombrable et* $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ *. La famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est dite sommable si* I *est fini ou bien s'il existe une bijection* $\sigma\, :\, \mathbb{N} \to I$ *telle que* $\sum u_{\sigma(n)}$ *converge* **absolument** *. Cela ne dépend pas de la bijection* σ *choisie, de même que la somme :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \quad .$$

Théorème 7 *Soit* $\sum u_n$ *une série absolument convergente et* $(A_i)_{i\in I}$ *une partition de* $\mathbb{N}$ *(finie ou infinie). Pour tout* $i \in I$ *la famille* $(u_j)_{j\in A_i}$ *est sommable, de même que la famille* $\Big(\displaystyle\sum_{j\in A_i} u_j\Big)_{i\in I}$ *et on a :*

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in A_i} u_i\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad .$$

Corollaire 2 *Soit* $\sum u_n$ *une série absolument convergente. Alors les séries* $\sum u_{2n}$ *et* $\sum u_{2n+1}$ *sont convergentes et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} \quad .$$

Exercice 6 **a)** Observer que ce résultat est faux pour la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$.
b) Le démontrer sans utiliser le théorème précédent.
c) Montrer que si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum(u_{2n}+u_{2n+1})$ est convergente et a la même somme. La réciproque est-elle toujours vraie ?

Théorème 8 **Séries doubles.** *Soit $(u_{p,q})_{p\in\mathbb{N},\,q\in\mathbb{N}}$ une famille à termes réels ou complexes. Si pour tout $p\in\mathbb{N}$ la série $\displaystyle\sum_{q\geqslant 0}|\,u_{p,q}\,|$ est convergente de somme s_p et si la série $\displaystyle\sum_{p\geqslant 0}s_p$ converge, alors les mêmes résultats sont vrais en intervertissant les variables p et q et on a :*

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\Big(\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big)=\sum_{q=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\Big)\quad .$$

6 Exercices classiques

Exercice 7 Étudier la convergence des séries de terme généraux suivants :
a) $\dfrac{n^3}{n!}$.
b) $\left(\alpha+\dfrac{1}{n}\right)^n$ où $\alpha\in\mathbb{R}_+$.
c) $\dfrac{n-\ln(n)}{n^3+\cos(n)}$.
d) $\dfrac{1}{n^\alpha\,\big(\ln(n)\big)^\beta}$ avec $\alpha\,,\,\beta\in\mathbb{R}$ (*séries de Bertrand*). Si $\alpha=1$, on comparera à une intégrale.
e) $\dfrac{1+(-1)^n\,n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$.
f) $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 8 **Formule de Stirling.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose : $u_n=e^n(n!)n^{-(n+\frac{1}{2})}$ et $v_n=\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge. En déduire qu'il existe un réel $K>0$ tel que :

$$n!\sim K\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}\quad .$$

En utilisant les intégrales de Wallis (voir le chapitre 4), montrer finalement que :

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\,\pi\,n}\quad .$$

Exercice 9 **Constante d'Euler.** Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose :

$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\qquad\text{et}\qquad a_n=\frac{1}{n}-\int_n^{n+1}\frac{dt}{t}\quad .$$

a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente : sa somme γ est appelée la constante d'Euler. Vérifier que : $\quad H_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$.
b) Montrer que : $a_n\sim\dfrac{1}{2\,n^2}$ et en déduire que : $\quad H_n=\ln(n)+\gamma+\dfrac{1}{2\,n}+o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

Exercice 10 **Règle de Duhamel.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle qu'il existe un réel α vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\Big(\frac{1}{n}\Big)\quad .$$

Montrer que si $\alpha>1$ alors $\sum u_n$ converge, et que si $\alpha<1$ alors $\sum u_n$ diverge. (on pourra poser : $v_n=n^{-\alpha'}$ pour tout entier $n\geqslant 1$ avec α' bien choisi et comparer u_n et v_n).