Chapitre 7 : Suites et séries de fonctions

1 Suites de fonctions

Définition 1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.*

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement *vers f sur I si pour tout $x \in I$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, c'est à dire si :*

$$\forall x \in I\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant N\,,\ |\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \varepsilon\ .$$

- On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément *vers f sur I si :*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant N\,,\ \forall x \in I\,,\ |\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \varepsilon\ .$$

La convergence uniforme implique dont la convergence simple, mais elle est beaucoup plus forte que celle-ci puisque l'entier N ne doit pas dépendre du point x. Elle équivaut à l'existence d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers 0 telle que pour tout entier n on a :

$$|\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant r_n \quad \text{pour tout } x \in I\ .$$

Exemple 1 Si l'on pose : $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geqslant 1$, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction nulle f sur $\mathbb{R}$. Elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ puisqu'en posant $x_n = n$ on obtient : $|\,f_n(x_n) - f(x_n)\,| = 1$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui interdit l'existence d'une majoration **indépendante de** x par une suite qui tend vers 0. Par contre, elle converge uniformément vers f sur l'intervalle $[-1\,,\,1]$ (de même que sur tout segment), puisque pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$|\,f_n(x) - f(x)\,| \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{pour tout } x \in [-1\,,\,1]\ .$$

Théorème 1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$. Alors la fonction f est continue sur I et pour tous $a\,,\,b \in I$ on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \quad .$$

Remarque 1 Importante ! Si une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur tout segment $J \subset I$, alors elle est continue sur I puisque la continuité est une propriété locale. Par conséquent, la conclusion de ce théorème reste vraie si la convergence est uniforme sur tout segment $J \subset I$.

Théorème 2 Théorème de la double limite. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions d'un intervalle I dans $\mathbb{C}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$, et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ un point adhérent à I. Si pour tout entier n la fonction f_n admet une limite finie ℓ_n en a, alors la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, f admet une limite en a et on a :*

$$\lim_{x\to a} f(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \ell_n\ .$$

Remarque 2 Si $a = +\infty$ dans ce théorème, il est par contre important que la convergence soit uniforme sur tout un intervalle $[c\,,\,+\infty\,[$, et pas seulement sur tout segment.

Théorème 3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I telle que :*
- il existe un point $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \to \mathbb{C}$.
Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et on a : $f' = g$. De plus, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur tout segment $J \subset I$.

Remarque 3 Ici aussi, comme la dérivabilité est une propriété locale, il suffit que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g uniformément sur tout segment $J \subset I$.

On obtient par récurrence la généralisation suivante de ce théorème aux fonctions de classe C^k pour $k \geqslant 1$.

Théorème 4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^k sur un intervalle I telle que :*
- pour tout entier $\ell \leqslant k-1$ il existe $a_\ell \in I$ tel que la suite $(f_n^{(\ell)}(a_\ell))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $J \subset I$.
Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^k. De plus, pour tout entier $\ell \leqslant k$ la suite $\left(f_n^{(\ell)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $J \subset I$ vers la fonction $f^{(\ell)}$.

Exercice 1 Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = x^n$ pour tout $x \in [0\,,\,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

2 Approximation des fonctions continues sur un segment

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un **segment** et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Le théorème de Heine permet facilement de démontrer qu'on peut approcher uniformément f par des fonctions en escalier ou par des fonctions continues et affines par morceaux, ce qui est utile dans de nombreuses démonstrations ayant fait l'objet de problèmes de CAPES. Le théorème de Weierstrass, qui figure au programme du CAPES, est nettement plus difficile à démontrer, et a fait l'objet de la première composition du CAPES 2003.

Proposition 1 *Il existe une suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur I.*

Proposition 2 *Il existe une suite de fonctions continues et affines par morceaux qui converge uniformément vers f sur I.*

Théorème 5 Théorème de Weierstrass. *Il existe une suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers f sur I.*

3 Séries de fonctions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x).$$

Définition 2 *La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente. Dans ce cas, les fonctions définies pour tout $x \in I$ par :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

sont appelées la fonction somme et le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$, on a : $R_n = S - S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.

Définition 3 *La série de fonctions* $\sum u_n$ *est uniformément convergente sur* I *si la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* I *.*

Ceci revient donc à dire qu'elle est simplement convergente et que la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction nulle.

Définition 4 *La série* $\sum u_n$ *converge normalement sur* I *s'il existe une suite réelle positive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, on a :*

$$| u_n(x) | \leqslant a_n \text{ pour tout } x \in I \qquad \text{et} \qquad \text{la série numérique } \sum_{n\geqslant 0} a_n \text{ converge.}$$

Chaque fonction u_n *doit donc être bornée et en posant :* $\| u_n\|_\infty = \sup\{ | u_n(x) | \ / x \in I \}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, cela équivaut à la convergence de la série numérique :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \| u_n\|_\infty \quad .$$

Théorème 6 *Si la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge normalement sur* I *, alors elle converge uniformément sur* I *et pour tout* $x \in I$ *la série* $\sum u_n(x)$ *est absolument convergente.*

ATTENTION : la réciproque de ce théorème est fausse, et il n'y a aucune implication entre convergence uniforme et convergence absolue !

Tous les théorèmes sur les suites de fonctions s'appliquent aux séries de fonctions en considérant la suite des sommes partielles, en sachant que la façon la plus simple de montrer la convergence uniforme d'une série de fonctions est de prouver sa convergence normale.

Théorème 7 *Si la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* I *et si* u_n *est continue pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *, alors la fonction somme* S *est continue sur* I *et pour tous* a *,* $b \in I$ *on a :*

$$\int_a^b S(t)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\int_a^b u_n(t)\, dt \Big) \quad .$$

Théorème 8 *Soit* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,, +\infty\}$ *un point adhérent à* I *, et supposons que pour chaque* $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* u_n *admet une limite finie* λ_n *en* a *. Si la série de fonctions* $\sum u_n$ *converge uniformément sur* I *, alors la série* $\sum \lambda_n$ *est convergente et on a :*

$$\lim_{x\to a} S(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \, .$$

Si de plus $\sum u_n$ *converge normalement sur* I *, alors la série* $\sum \lambda_n$ *est absolument convergente.*

Théorème 9 *Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *la fonction* u_n *est de classe* C^1*, si la série de fonctions* $\sum u'_n$ *converge uniformément sur* I *et s'il existe un point* $a \in I$ *tel que la série* $\sum u_n(a)$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge uniformément sur tout segment* $J \subset I$ *, sa fonction somme est de classe* C^1*, et pour tout* $x \in I$ *on a :*

$$S'(x) \ = \ \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(x) \ .$$

Si de plus $\sum u'_n$ *converge normalement sur* I *et si* $\sum u_n(a)$ *converge absolument, alors* $\sum u_n$ *converge normalement sur tout segment* $J \subset I$ *.*

4 Séries de Fourier

La formule de Parseval et le théorème de Dirichlet relèvent de l'UE "linéaire", et nous n'étudierons donc ici que la convergence normale des séries de Fourier en commençant par quelques rappels. On fixe un réel $T > 0$ et on note E_T l'espace vectoriel des applications T-périodiques et continues par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\omega = 2\pi/T$ et pour toute fonction $f \in E_T$ on pose :

$$c_p(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ e^{-ip\omega t}\,dt$$

pour tout $p \in \mathbb{Z}$ (*coefficients de Fourier exponentiels*) ainsi que :

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt\ ,\ a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \cos(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T \sin(n\,\omega\,t)\,f(t)\,dt$$

pour tout entier $n \geqslant 1$ (*coefficients de Fourier trigonométriques*).

Théorème 10 *Pour toute fonction $f \in E_T$, on a la* **formule de Parseval** *:*

$$\frac{1}{T}\int_0^T |\,f(t)\,|^2\,dt\ =\ \sum_{p=-\infty}^{+\infty} |\,c_p(f)\,|^2 = |\,a_0(f)\,|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |\,a_n(f)\,|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} |\,b_n(f)\,|^2\ .$$

Théorème 11 (Jordan-Dirichlet) *Pour toute fonction T-périodique $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de classe C^1 par morceaux, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\begin{aligned} f_n\ (x) &= c_0(f)\ + \sum_{k=1}^{n} \big(\,c_k(f)\,e^{i\,k\,\omega\,x}\ +\ c_{-k}(f)\,e^{-i\,k\,\omega\,x}\,\big) \\ &= a_0(f)\ + \sum_{k=1}^{n} \big(\,a_k(f)\ \cos\,(k\,\omega\,x)\ +\ b_k(f)\ \sin\,(k\,\omega\,x)\,\big) \end{aligned}$$

converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $\widehat{f}$ définie par :

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2}\Big(\lim_{t\to x^-} f(t)\ +\ \lim_{t\to x^+} f(t)\Big) \qquad \textit{pour tout } x\in\mathbb{R}\,.$$

Proposition 3 *Pour toute fonction T-périodique $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ continue et de classe C^1 par morceaux, on a : $c_p(f') = i\,p\,c_p(f)$ pour tout $p\in\mathbb{Z}$, et pour tout entier $n\geqslant 1$ on a : $a_n(f') = n\,b_n(f)$ et $b_n(f') = -n\,b_n(f)$.*

Théorème 12 *Si la fonction $f\ :\ \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est T-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux, chacune des séries $\sum c_n(f)\,e^{i\,n\,\omega\,x}$, $\sum c_{-n}(f)\,e^{-i\,n\,\omega\,x}$, $\sum a_n(f)\ \cos(n\,\omega\,x)$ et $\sum b_n(f)\ \sin(n\,\omega\,x)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, et on a pour tout réel x :*

$$\begin{aligned} f\ (x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\,e^{i\,n\,\omega\,x}\ + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(f)\,e^{-i\,n\,\omega\,x} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\ \cos\,(n\,\omega\,x)\ + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)\ \sin\,(n\,\omega\,x)\,. \end{aligned}$$

Démonstration : la formule de Parseval montre que chacune des séries $\sum\ |\ c_n(f')\ |^2$, $\sum |\,c_{-n}(f')\,|^2$, $\sum |\,a_n(f')\,|^2$ et $\sum |\,b_n(f')\,|^2$ converge, et on a :

$$A\,B \leqslant \frac{A^2+B^2}{2}\quad ,$$

pour tous réels positifs A et B, ce qui montre la convergence des séries $\sum\ |\ c_n(f)\ |$, $\sum |\,c_{-n}(f)\,|$, $\sum |\,a_n(f)\,|$ et $\sum |\,b_n(f)\,|$ puisque $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ converge, d'où le résultat.

Remarque : si f n'est pas continue, sa série de Fourier ne converge pas uniformément, et on peut montrer qu'au voisinage d'une discontinuité ses sommes partielles "dépassent" f d'environ 9% de la hauteur du saut : c'est le *phénomène de Gibbs*, qu'on peut visualiser en étudiant la série de Fourier d'une fonction "créneau".

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et de classe C^1 par morceaux dont les coefficients de Fourier exponentiels vérifient :

$$c_p(f) = o\Big(\frac{1}{p^k}\Big) \quad \text{quand } p \to \pm\infty$$

pour tout entier naturel k. Montrer que f est de classe C^∞.

5 Exercices

Exercice 3 Pour tout réel x on pose :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + n^4 x^2} \quad .$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Calculer la limite de f en $\pm\infty$.

Exercice 4 Pour tout entier $n \geqslant 1$ on considère la fonction $u_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x} \quad .$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ et que sa fonction somme est de classe C^∞.

Exercice 5 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels qui converge vers a. Montrer que la suite $\big(f_n(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Exercice 6 (inspiré du du CAPES 2009). Pour tout réel x, on pose :

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \quad , \quad h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^x} \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad .$$

a) Montrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$ et calculer sa limite en $+\infty$.

b) Montrer que ζ est strictement décroissante et strictement convexe sur $]\,1\,,\,+\infty\,[$.

c) Montrer que pour tout réel $x > 1$, on a :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} \quad ,$$

et en déduire que : $\qquad \zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{1}{x-1} \quad .$

d) Montrer que pour tout réel $x > 1$, on a :

$$h(x) = (1 - 2^{-x})\ \zeta(x) \qquad \text{et} \qquad f(x) = (2^{1-x} - 1)\ \zeta(x) \quad .$$

e) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2) \quad .$$