Chapitre 9 : Intégration sur un intervalle quelconque

1 Fonctions intégrables

Définition 1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si l'ensemble $\left\{ \int_J f(t)\,dt \,/\, J \subset I \text{ est un segment } \right\}$ est majoré, et on note alors :*

$$\int_I f(t)\,dt = \sup_{J \subset I \text{ est un segment}} \int_J f(t)\,dt\ .$$

Si I est un segment, on retrouve donc la notion d'*intégrale définie*, mais si par exemple $I = [\,a\,,\,b\,[$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a < b$, la *convergence* de cette *intégrale impropre* équivaut à l'existence de la limite :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{b' \to b \\ b' \in I}} \int_a^{b'} f(t)\,dt$$

puisque l'intégrale de f sur le segment $[a\,,\,b'\,]$ est croissante par rapport à b', et si on a : $I =]\,a\,,\,b\,[$ avec $a\,,\,b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\,,\,+\infty\}$ et $a < b$, elle équivaut à l'existence de la limite :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{\substack{a' \to a\,,\,b' \to b \\ a'\,,\,b' \in I}} \int_{a'}^{b'} f(t)\,dt\ .$$

Définition 2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. On dit que f est intégrable sur I si la fonction $|\,f\,|$ est intégrable. Dans ce cas, on peut poser :*

$$\int_I f(t)\,dt = \lim_{\substack{a' \to \inf I\,,\,b' \to \sup I \\ a' \in I\,,\,b' \in I}} \int_{a'}^{b'} f(t)\,dt\ .$$

On ne considère donc ici que des intégrales *absolument convergentes*, et la fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable au voisinage des bornes **ouvertes** de I comme l'exprime la proposition suivante.

Proposition 1 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et soient $c\,,\,d$ deux points de I. La fonction f est intégrable sur I si et seulement si elle est intégrable sur $I_- = I \cap]-\infty\,,\,c\,]$ et sur $I_+ = I \cap [\,d\,,\,+\infty\,[$ et on a dans ce cas :*

$$\int_I f(t)\,dt = \int_{I_-} f(t)\,dt + \int_c^d f(t)\,dt + \int_{I_+} f(t)\,dt\ .$$

Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle quelconque, on peut donc toujours se ramener à l'étude de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive sur un intervalle semi-ouvert.

Proposition 2 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, soient $f\,,\,g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux et intégrables sur I et soient $\lambda\,,\,\mu \in \mathbb{C}$. Alors la fonction $\lambda\,f + \mu\,g$ est intégrable sur I et on a :*

$$\int_I \lambda\,f(t) + \mu\,g(t)\,dt = \lambda \int_I f(t)\,dt + \mu \int_I g(t)\,dt\ .$$

Proposition 3 *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et soient f, g : $I \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux telles que $|f(x)| \leqslant |g(x)|$ pour tout $x \in I$. Si g est intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.*

Corollaire 1 *Soient f, g : $[a, b[\to \mathbb{C}$ deux fonctions continues par morceaux.*
- *Si $f = O(g)$ au voisinage de b et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f l'est aussi.*
- *Si $|f| \sim |g|$ au voisinage de b, alors f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si g l'est.*

On a bien sûr les mêmes résultats si $I =]a, b]$ en comparant les fonctions au voisinage de a.

Exemple 1 La fonction $t \mapsto e^t$ est intégrable sur $\mathbb{R}_-$ et $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 2 Intégrales de Riemann La fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$, et elle est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. L'intégrale doublement impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est donc divergente pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 1 Intégrales de Bertrand Montrer que la fonction $t \mapsto t^{-\alpha} (\ln t)^{-\beta}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si : $\alpha > 1$ ou : $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice 2 Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $[a, b[$. Montrer que :

$$\lim_{x \to b^-} \int_x^b f(t)\, dt = 0\,.$$

Exercice 3 Soit f : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante et continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la série de terme général $f(n)$ est convergente.

Exercice 4 Étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{1}{1 - e^{-t}} - \frac{1}{t} \right) dt \quad .$$

Exercice 5 Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{\big(\ln(\ln x)\big)^{\ln x}} \qquad \text{et} \qquad \int_3^{+\infty} \frac{dx}{\big(\ln x\big)^{\ln(\ln x)}} \quad .$$

2 Théorèmes de convergence

Théorème 1 Théorème de convergence dominée *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I. On suppose que :*
- *pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente : on note $f(t)$ sa limite,*
- *la fonction f est continue par morceaux sur I,*
- *il existe une fonction φ : $I \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$|f_n(t)| \leqslant \varphi(t) \qquad \text{pour tout } t \in I \text{ et tout } n \in \mathbb{N}\,.$$

Alors f et toutes les fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ sont intégrables sur I et on a :

$$\int_I f(t)\, dt = \lim_{n \to +\infty} \int_I f_n(t)\, dt\,.$$

Théorème 2 Intégration terme à terme *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur un intervalle* I *. On suppose que :*

- pour tout $t \in I$ *, la série* $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ *est convergente : on note* $f(t)$ *sa somme,*

- la fonction f *est continue par morceaux sur* I *,*

- la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |\, f_n(t)\,|\; dt$ *est convergente.*

Alors la fonction f *est intégrable sur* I *et on a :*

$$\int_I f(t)\, dt \;=\; \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\, dt\ .$$

Exercice 6 Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.

Exercice 7 Calculer : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n} \left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$.

Exercice 8 Calculer : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-n\,t}\, dt$.

3 Intégrales dépendant d'un paramètre

Soient Ω , I deux intervalles et soit $f\ :\ \Omega\times I \to \mathbb{C}$ une fonction. Pour tout $x\in\Omega$ on pose :

$$F(x) = \int_I f(x\,,\,t)\, dt\ .$$

Théorème 3 Théorème de continuité *On suppose que :*

- pour tout $x\in\Omega$ *la fonction* $t\mapsto f(x\,,\,t)$ *est continue par morceaux sur* I *,*

- pour tout $t\in I$ *la fonction* $x\mapsto f(x\,,\,t)$ *est continue sur* Ω *,*

- il existe une fonction $\varphi\ :\ I\to\mathbb{R}_+$ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que :*

$$|\, f(x\,,\,t)\,| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } (x\,,\,t)\in\Omega\times I\,.$$

Alors la fonction F *est définie et continue sur* Ω *.*

Théorème 4 Théorème de Leibniz *On suppose que :*

- pour tout $x\in\Omega$ *la fonction* $t\mapsto f(x\,,\,t)$ *est continue par morceaux et intégrable sur* I *,*

- pour tout $t\in I$ *la fonction* $x\mapsto f(x\,,\,t)$ *est de classe* C^1 *sur* Ω *: on note* $\partial_x f$ *sa dérivée,*

- pour tout $x\in\Omega$ *la fonction* $t\mapsto \partial_x f(x\,,\,t)$ *est continue par morceaux sur* I *,*

- il existe une fonction $\varphi\ :\ I\to\mathbb{R}_+$ *continue par morceaux et intégrable sur* I *telle que :*

$$|\, \partial_x f(x\,,\,t)\,| \leqslant \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } (x\,,\,t)\in\Omega\times I\,.$$

Alors la fonction F *est définie et de classe* C^1 *sur* Ω *et on a :*

$$F'(x) = \int_I \partial_x f(x\,,\,t)\, dt \qquad \textit{pour tout } x\in\Omega\,.$$

Remarque : dans ces deux théorèmes, il suffit d'obtenir "l'hypothèse de domination" sur tout segment $J\subset\Omega$ puisque si F est continue ou dérivable sur tout segment $J\subset\Omega$, alors elle l'est sur Ω tout entier.

Exercice 9 Soit $h\,:\,[0\,,\,1] \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Pour tout réel $x \geqslant 0$ on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \big(h(t)\big)^x \, dt \ .$$

Montrer que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10 Pour tout réel x, on pose :

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \ .$$

a) Montrer que les fonctions F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que la fonction $F + G^2$ est constante.
b) Montrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$.

Exercice 11 La **fonction Gamma** d'Euler est définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt \ .$$

a) Montrer que Γ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.
b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) \;=\; x\,\Gamma(x)$. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
c) Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Exercice 12 On considère la fonction $f\,:\,\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x\,t}}{1+t^2}\, dt \quad .$$

a) Montrer que f est bien définie et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $f(0)$.
b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergeant vers $+\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$h_n(t) = \frac{e^{-x_n\,t}}{1+t^2} \qquad \text{pour tout réel } t > 0 \quad .$$

Déterminer la limite de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h_n(t)\, dt$ et en déduire la limite de f en $+\infty$.
c) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et qu'elle vérifie l'équation différentielle :

$$(E): \quad y'' + y = \frac{1}{x} \quad .$$

d) * Montrer que f est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite en $+\infty$.