

Chapitre 10 : Équations différentielles

1 Définitions

Définition 1 Soit g une application de $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R}^p . On appelle solution de l'équation différentielle $g(t, y, y') = 0$ toute application dérivable $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, où D est une partie de \mathbb{R} , vérifiant : $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$ et $g(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = 0$ pour tout $t \in D$.

Cette situation est trop générale pour que les résultats ci-dessous aient une formulation simple, et on se restreint désormais aux équations sous forme résolue :

Définition 2 On appelle équation sous forme résolue toute équation différentielle de la forme $y' = f(t, y)$, où $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. On appelle solution de cette équation différentielle toute application dérivable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, où I est un intervalle de \mathbb{R} , vérifiant : $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ et $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ pour tout $t \in I$.

Définition 3 Soit $y' = f(t, y)$ une équation différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, soient $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux solutions de cette équation différentielle. Si $I_1 \subseteq I_2$ et si, pour tout $t \in I_1$, on a $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, on dit que la solution φ_2 est un prolongement de la solution φ_1 . Si $I_1 \neq I_2$, on dit que c'est un prolongement strict.

Définition 4 Soient $y' = f(t, y)$ une équation différentielle sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une solution de cette équation différentielle. L'application φ est appelée solution maximale de l'équation différentielle si elle n'admet pas de prolongement strict.

Remarque 1 Tous les résultats suivants se généralisent sans difficulté au cas des équations différentielles définies sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, mais il est fondamental que la variable t varie dans \mathbb{R} et non dans \mathbb{C} .

Exercice 1 Équation intégrale Montrer que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue, si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifie : $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$, et si on choisit $t_0 \in I$, alors φ est solution de $y' = f(t, y)$ si et seulement elle est continue et vérifie pour tout $t \in I$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds.$$

2 Le problème de Cauchy

Soient (E) l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et (t_0, y_0) un point de Ω : un problème naturel est le problème de Cauchy, qui est de trouver toutes les solutions φ de (E) satisfaisant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$.

Définition 5 Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. On dit que f est localement lipschitzienne par rapport à y si tout point $(t_0, y_0) \in \Omega$ admet voisinage V tel qu'il existe une constante positive k vérifiant :

$$\forall (t, y_1) \in V, \forall (t, y_2) \in V, \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq k \|y_1 - y_2\|,$$

la norme étant l'une quelconque des normes (toutes équivalentes) sur \mathbb{R}^n . En particulier, toute fonction de classe C^1 est localement lipschitzienne par rapport à y .

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz) Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue et localement lipschitzienne par rapport à y . Pour tout $(t_0, y_0) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale φ de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ satisfaisant la condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 .

Il faut noter que l'intervalle I dépend de l'équation et de la condition initiale (t_0, y_0) , et qu'on ne peut pas le prescrire à l'avance sans hypothèses supplémentaires.

Exemple 1 Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(t, y) = y^2$ qui est de classe C^1 et ne dépend pas de t : on dit que l'équation $y' = y^2$ est *autonome*. Elle admet la fonction nulle $y_0 : t \mapsto 0$ comme solution sur \mathbb{R} (donc maximale), donc si une solution $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ de l'équation vérifie $\varphi(t_0) = 0$ avec $t_0 \in I$, le théorème de Cauchy-Lipschitz pour la condition initiale $y(t_0) = 0$ montre que φ est identiquement nulle. Par conséquent, les solutions non identiquement nulles $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifient :

$$\frac{-y'(t)}{y^2(t)} = -1 \quad \text{pour tout } t \in I \quad ,$$

et en intégrant on en déduit qu'il existe une constante c vérifiant : $\frac{1}{y(t)} = c - t$ pour tout $t \in I$, donc : $y(t) = \frac{1}{c - t}$ et I ne contient pas c : les solutions maximales autres que y_0 ne sont donc pas définies sur \mathbb{R} tout entier mais uniquement sur des intervalles $] - \infty, c[$ ou $]c, +\infty[$ et elles "explosent" au point c , alors que l'équation est parfaitement régulière.

Exemple 2 Considérons l'équation différentielle $y' = 2\sqrt{|y|}$. La fonction $f : (t, y) \mapsto 2\sqrt{|y|}$ est continue et localement lipschitzienne par rapport à la variable y sur chacun des deux demi-plans $\Omega_+ = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\}$ et $\Omega_- = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / y < 0\}$, mais pas sur \mathbb{R}^2 tout entier. Comme ci-dessus, on montre que ses solutions maximales sont : $\varphi(t) = (t + c)^2$ pour $t \in] - c, +\infty[$ dans Ω_+ et $\varphi(t) = -(t + c)^2$ pour $t \in] - \infty, c[$ dans Ω_- , avec $c \in \mathbb{R}$. Par tout point (t_0, y_0) de Ω_+ (respectivement Ω_-), il passe une unique solution maximale définie sur l'intervalle ouvert $] - c, +\infty[$ (respectivement $] - \infty, -c[$). On notera que ces solutions tendent vers 0 lorsque t tend vers $-c$ mais que le point $(-c, 0)$ n'appartient ni à Ω_+ , ni à Ω_- .

D'autre part, on a : $0 = 2\sqrt{|0|}$, ce qui correspond à la solution maximale $\varphi_0(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Si l'on résout maintenant l'équation sur \mathbb{R}^2 tout entier, par tout point du plan passent une infinité de courbes intégrales définies sur \mathbb{R} , donc maximales. Elles sont obtenues en raccordant, sur des intervalles arbitraires, les solutions dans Ω_- et Ω_+ avec φ_0 .

Pour démontrer le théorème 1, on commence par prouver sa version locale en utilisant le résultat de l'exercice 1 et le théorème du point fixe dans l'espace des fonctions continues :

Lemme 1 *Sous les hypothèses du théorème 1, il existe un réel $\delta > 0$ (qui dépend de t_0 et y_0) et une unique solution $\varphi_1 :]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}^n$ de $y' = f(t, y)$ vérifiant : $\varphi_1(t_0) = y_0$.*

Le lemme de Zorn permet ensuite de montrer l'existence et l'unicité des solutions maximales, obtenues en raccordant "le plus possible" toutes ces solutions locales.

Exercice 2 À l'aide du lemme 1, montrer que ces solutions maximales sont définies sur des intervalles **ouverts**.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel de dimension finie et Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times E$. Soit $f : \Omega \rightarrow E$ une application de classe C^r avec $r \geq 1$. Soit y une solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. Montrer par récurrence que la fonction y est de classe C^{r+1} .

3 Équations d'ordre supérieur

Dans cette section, on considère uniquement des équations scalaires : ce qui suit se généralise aux fonctions à valeurs vectorielles, mais les notations deviennent plus compliquées.

Définition 6 *Une équation différentielle scalaire d'ordre n est une équation de la forme $(E_n) : y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, où f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs*

réelles. Une solution de cette équation est une fonction n fois dérivable $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un intervalle de \mathbb{R} , vérifiant pour tout $t \in I$:

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in \Omega \quad \text{et} \quad \varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)).$$

A une telle équation, on associe le système d'ordre 1 :

$$(S_1) : \begin{cases} y_1' & = y_2 \\ & \vdots \\ y_{n-1}' & = y_n \\ y_n' & = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est solution de (E_n) , alors $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (S_1) . Réciproquement, si $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est solution de (S_1) , alors la fonction φ_1 est n fois dérivable, et c'est une solution de (E_n) . Grâce à cette correspondance, on peut reformuler le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre n :

Théorème 2 Soit Ω est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . Pour tout point $(t_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale φ de $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ vérifiant : $\varphi^{(k)}(t_0) = y_0^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Elle est définie sur un intervalle ouvert I contenant t_0 .

Le problème de Cauchy pour une équation d'ordre n est donc la donnée **en un même point** des valeurs de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées successives. Il ne faut surtout pas confondre cette question avec le *problème de Dirichlet*, qui consiste à résoudre une équation différentielle en se donnant des "conditions aux limites". Ainsi, pour une équation d'ordre 2, le problème de Cauchy consiste à trouver les solutions φ vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$ et $\varphi'(t_0) = y_0'$, alors que le problème de Dirichlet sur le segment $[a, b]$ consiste à trouver les solutions φ sur $[a, b]$ vérifiant $\varphi(a) = y_1$ et $\varphi(b) = y_2$: il n'admet pas toujours une unique solution !

4 Équations à variables séparables

Il s'agit des équations scalaires de la forme $(E) : y' = h(t)g(y)$, où la fonction $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ est localement lipschitzienne. Pour tout $c \in J$ tel que $g(c) = 0$, la fonction constante $\varphi_c : t \mapsto c$ est solution de (E) sur I . Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet donc d'affirmer que si $\varphi : I_0 \rightarrow J$ est une solution non constante de (E) avec $I_0 \subset I$, la fonction $g \circ \varphi$ ne s'annule nulle part. Elle est donc à valeurs dans un intervalle $J_0 \subset J$ sur lequel g ne s'annule pas et où on peut récrire (E) sous la forme $y'/g(y) = h(t)$. Soit G une primitive de $1/g$ et soit H une primitive de h : l'équation (E) équivaut donc à la constance de la fonction $G \circ \varphi - H$, c'est à dire qu'on a : $G(\varphi(t)) = H(t) + c$ pour tout $t \in I_0$, avec $c \in \mathbb{R}$ fixé. Si l'on sait résoudre l'équation $G(y) = c$, on obtient ainsi les solutions de (E) .

Exercice 4 Résoudre les équations différentielles suivantes.

- a) $y' = -ty^2$
- b) $t^3y' + y^3 = 0$.

5 Équations linéaires

Définition 7 On appelle *équation différentielle linéaire* toute équation $y' = f(t, y)$ définie sur $I \times \mathbb{R}^n$ avec $I \subset \mathbb{R}$, où $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de la forme : $f(t, y) = a(t)(y) + b(t)$ avec $a(t) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $b(t) \in \mathbb{R}^n$ pour tout $t \in I$. L'équation $y' = a(t)(y)$ est appelée *l'équation homogène associée*, et la fonction $t \mapsto b(t)$ est le *second membre*.

En notant $A(t)$ la matrice de $a(t)$ dans la base canonique, $B(t)$ les coordonnées de $b(t)$ et $Y(t)$ celles de $y(t)$, l'équation s'écrit donc : $Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t)$ pour $t \in I$. On parle aussi de *système différentiel*.

Théorème 3 *On considère une équation différentielle linéaire $y' = a(t)y + b(t)$ sur $I \times \mathbb{R}^n$. Si I est un intervalle ouvert et si les applications a et b sont continues sur I , les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites sur $I \times \mathbb{R}^n$ et les solutions maximales sont définies sur I tout entier. Les solutions du système homogène forment un espace vectoriel de dimension n et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

En admettant le fait que les solutions maximales sont définies sur I tout entier, les exercices suivants démontrent ce théorème à partir du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Exercice 5 On note S_H l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y$. Montrer que S_H est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et que pour tout point $t \in I$, l'application $ev_t : S_H \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $ev_t(\varphi) = \varphi(t)$ est un isomorphisme.

On en déduit que les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ forment une base de S_H si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\varphi_1(t_0), \varphi_2(t_0), \dots, \varphi_n(t_0)$ forment une base de \mathbb{R}^n , et que dans ce cas les vecteurs $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$ forment une base de \mathbb{R}^n pour tout $t \in I$.

Exercice 6 On note S l'ensemble des solutions de $y' = a(t)y + b(t)$. Montrer que S est un sous-espace affine de $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ dirigé par S_H .

Ce dernier résultat est le *principe de superposition*, et on le retient souvent en disant que la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

5.1 Méthode de variation des constantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient $a : I \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ et $b : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications continues. On considère les équations linéaires sur $I \times \mathbb{R}^n$:

$$(E) : y' = a(t)y + b(t) \quad \text{et} \quad (H) : y' = a(t)y.$$

Supposons qu'on ait résolu (H) , et soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une base de S_H . Les solutions de (H) sont donc les fonctions de la forme : $c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$ où c_1, \dots, c_n sont des constantes réelles fixées, et la méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions de (E) sous la forme : $f = c_1 \varphi_1 + \dots + c_n \varphi_n$ où c_1, \dots, c_n sont des fonctions dérivables de I dans \mathbb{R} . Pour tout $t \in I$, on a donc : $f'(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k'(t) + c_k'(t) \varphi_k(t)$, d'où :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^n c_k(t) a(t) (\varphi_k(t)) + c_k'(t) \varphi_k(t) = a(t) \left(\sum_{k=1}^n c_k(t) \varphi_k(t) \right) + \sum_{k=1}^n c_k'(t) \varphi_k(t)$$

donc : $f'(t) = a(t)(f(t)) + \sum_{k=1}^n c_k'(t) \varphi_k(t)$. On en déduit que f vérifie (E) si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^n c_k'(t) \varphi_k(t) = b(t) \quad \text{pour tout } t \in I,$$

c'est à dire si les coordonnées de $b(t)$ dans la base $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ sont $(c_1'(t), \dots, c_n'(t))$. En notant $R(t)$ la matrice de $(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ dans la base canonique pour tout $t \in I$, on

obtient donc le système inversible :

$$(VC) \quad : \quad R(t) \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ \vdots \\ c'_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

En résolvant ce système, on obtient les fonctions c'_1, \dots, c'_n , puis les fonctions c_1, \dots, c_n , et finalement f . En choisissant des primitives de c'_1, \dots, c'_n , on trouve ainsi une solution particulière f_0 de (E) , mais si l'on considère toutes les primitives possibles (et donc n constantes d'intégration), on obtient la solution générale de (E) , dont les composantes sont données par : $F_0(t) + R(t)C$ avec $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, et on retrouve ainsi la solution générale de (H) .

5.2 Équations linéaires en dimension 1

En dimension $n = 1$ (on parle d'équations scalaires), on sait résoudre les équations différentielles linéaires (ce qui n'est plus le cas si $n \geq 2$) : l'équation s'écrit $y' = a(t)y + b(t)$ sur $I \times \mathbb{R}^n$, où a et b sont deux fonctions réelles continues sur I . Si A est une primitive de a sur I , l'équation s'écrit : $(y(t)e^{-A(t)})' = (y'(t) - a(t)y(t))e^{-A(t)} = b(t)e^{-A(t)}$: en choisissant une primitive B de $b e^{-A}$, les solutions s'écrivent donc : $(B + c)e^A$ avec $c \in \mathbb{R}$, et on retrouve le fait que l'ensemble des solutions est une droite affine : on a en fait utilisé la méthode de variation des constantes, qui est particulièrement simple dans ce cas.

Exercice 7 Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que la solution de $y' = a(t)y + b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ est donnée pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u) du} b(s) ds.$$

5.3 Équations linéaires à coefficients constants

Si l'application $a : \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ est constante, on note m la valeur de cette constante et $M \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice de m dans la base canonique de \mathbb{R}^n . Le système (H) s'écrit donc : $Y'(t) = MY(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, avec $Y(t) \in M_{n,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 1 Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, la série $\sum \frac{1}{n!} M^n$ est convergente, et on pose :

$$e^M = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} M^n.$$

L'application $e_M : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ définie par $e_M(t) = e^{tM}$ est dérivable et on a :

$$e'_M(t) = M e_M(t) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Corollaire 1 Soient $M \in M_n(\mathbb{R})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $Y_0 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. La solution $Y : \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{R})$ de $Y' = MY$ vérifiant $Y(t_0) = Y_0$ est donnée par : $Y(t) = e^{(t-t_0)M} Y_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On est donc amené à calculer la matrice e^{tM} pour $t \in \mathbb{R}$. Si M est diagonalisable, on écrit : $M = PDP^{-1}$ avec D diagonale, et on appelle $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses valeurs propres. On a alors : $e^{tM} = P e^{tD} P^{-1}$ où e^{tD} est diagonale, de valeurs propres $e^{t\lambda_i}$ pour $1 \leq i \leq n$: ceci revient à décomposer l'équation vectorielle $y' = m y$ en n équations scalaires indépendantes $y'_i = \lambda_i y_i$ dans une base de diagonalisation de m . Sinon, on peut trianguler M (en passant dans \mathbb{C} au besoin) pour résoudre les équations "en cascade".

Exercice 8 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}.$$

5.4 Équations linéaires d'ordre n

Il s'agit d'équations différentielles scalaires de la forme :

$$(EL_n) : y^{(n)} = a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y + b(t),$$

où les fonctions a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b sont définies sur un intervalle I de \mathbb{R} . A une telle équation, on associe comme ci-dessus le système $(SL_1) : Y' = A(t)Y + B(t)$, avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si $b = 0$ (équations homogènes), la correspondance décrite ci-dessus entre les solutions de (EL_n) et les solutions de (SL_1) est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et en général c'est un isomorphisme affine. On déduit le théorème suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

Théorème 4 *Si I est un intervalle ouvert et si les fonctions a_0, a_1, \dots, a_{n-1} et b sont continues sur I , les solutions maximales de (EL_n) sont définies sur I tout entier. Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension n et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

Une fois résolue l'équation homogène, on peut comme ci-dessus résoudre l'équation avec second membre **en appliquant la méthode de variation des constantes au système SL_1** . Si $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène, notons $Y_k(t)$ le vecteur-colonne dont les composantes sont $\varphi_k(t), \varphi_k'(t), \dots, \varphi_k^{(n-1)}(t)$ pour $1 \leq k \leq n$. Les applications $(Y_k)_{1 \leq k \leq n}$ forment une base de l'espace des solutions du système homogène, et on pose $Y(t) = c_1(t)Y_1(t) + \dots + c_n(t)Y_n(t)$ pour $t \in I$, où les fonctions $c_1, \dots, c_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables. Mais si Y est solution de (SL_1) , ses composantes s'écrivent $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$ où φ est solution de (EL_n) , ce qui conduit à poser :

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix},$$

et on obtient le système inversible :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \dots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

5.5 Équations linéaires d'ordre n à coefficients constants

Définition 8 *Soit $(H) : y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y$ une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n à coefficients constants. On appelle équation caractéristique de (H) l'équation $P(\lambda) = 0$, où $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_1X - a_0$.*

Exercice 9 On appelle *matrice compagnon* de P la matrice A définie à la section 5.4. Montrer que $(-1)^n P$ est le polynôme caractéristique de A .

Théorème 5 *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines de P , et $\mu_k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de λ_k pour*

$1 \leq k \leq r$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les fonctions $\left(t \mapsto e^{\lambda_k t} t^j \right)_{1 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq \mu_k - 1}$ forment une base de S_H .

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose : $\lambda_k = a_k + i\omega_k$ pour $1 \leq k \leq r$, avec : $\omega_k = 0$ si $1 \leq k \leq R$ et : $\omega_k \neq 0$ si $R+1 \leq k \leq r$. Les familles de fonctions : $\left(t \mapsto e^{a_k t} t^j \right)_{1 \leq k \leq R, 0 \leq j \leq \mu_k - 1}$, $\left(t \mapsto e^{a_k t} \cos(\omega_k t) t^j \right)_{R+1 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq \mu_k - 1}$ et $\left(t \mapsto e^{a_k t} \sin(\omega_k t) t^j \right)_{R+1 \leq k \leq r, 0 \leq j \leq \mu_k - 1}$ forment une base de S_H .

Pour résoudre (E) : $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0 y + b(t)$, on peut appliquer la méthode de variation des constantes, mais il est souvent plus simple d'utiliser le résultat suivant.

Proposition 2 Si b est de la forme : $b(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ pour $t \in \mathbb{R}$, où Q est un polynôme de degré q , l'équation (E) admet une solution particulière de la forme $t \mapsto R(t)e^{\lambda t}$, où R est un polynôme de degré q si λ n'est pas racine de P , et de degré $q + \mu_k$ si $\lambda = \lambda_k$.

Exercice 10 Résoudre l'équation différentielle : $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = t$.

Exercice 11 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle : $y^{(n)} - y = e^t + e^{-t}$.

6 Étude qualitative

La plupart des équations différentielles ne sont pas algébriquement résolubles et, même si l'on sait que par tout point il passe une unique solution maximale, il faut arriver à déterminer des propriétés de cette solution sans en connaître d'expression explicite. L'argument principal de l'approche qualitative, dû au théorème de Cauchy-Lipschitz, est que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et si $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des solutions maximales **distinctes** de l'équation $y' = f(t, y)$, alors on a : $\varphi_1(t) \neq \varphi_2(t)$ pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, c'est à dire que "les courbes intégrales ne peuvent pas se croiser". Nous allons utiliser ici la méthode qualitative pour étudier les solutions d'une équation simple.

L'équation logistique (E) : $y' = y(1 - y)$ dans \mathbb{R} .

Cette équation est autonome, c'est à dire que la fonction $f : (t, y) \mapsto y(1 - y)$ ne dépend pas de t : on en déduit que $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution maximale de (E), alors pour tout réel T l'application $t \mapsto \varphi(t+T)$ est aussi une solution maximale de (E) sur $]a-T, b-T[$, c'est à dire que "ses courbes intégrales sont invariantes par translation". Ses solutions constantes sont les fonctions $\varphi_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par : $\varphi_0(t) = 0$ et $\varphi_1(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz montre que si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une autre solution maximale de (E), alors on a : $\varphi(t) \neq 0$ et $\varphi(t) \neq 1$ pour tout $t \in I$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire un régionnement du plan (t, y) en trois zones : la zone I définie par $y > 1$, la zone II définie par $0 < y < 1$ et la zone III définie par $y < 0$. Si (t_0, y_0) est un point d'une de ces zones, la courbe représentative de la solution maximale φ vérifiant : $\varphi(t_0) = y_0$ reste dans cette zone.

Comportement des solutions dans la zone I : Dans cette zone, on a : $f(t, y) < 0$, donc les solutions sont décroissantes et minorées par 1. Soit (t_0, y_0) un point de cette zone, et φ la solution maximale passant par (t_0, y_0) . On sait que φ est définie sur $[t_0, b[$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et que $\varphi(t)$ tend vers une limite réelle $\ell \geq 1$ quand t tend vers b . Si l'on avait : $b \in \mathbb{R}$, on appliquerait le théorème de Cauchy-Lipschitz au point (b, ℓ) et on en déduirait qu'on peut prolonger strictement φ , ce qui est contradictoire. On en déduit que $b = +\infty$ et que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = \ell \geq 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi'(t) = \ell(1 - \ell) \quad .$$

Si l'on avait $\ell > 1$, on en déduirait que φ' tend vers une limite strictement négative en $+\infty$, ce qui montrerait que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty$$

et on obtiendrait une contadiction, donc on en conclut que :

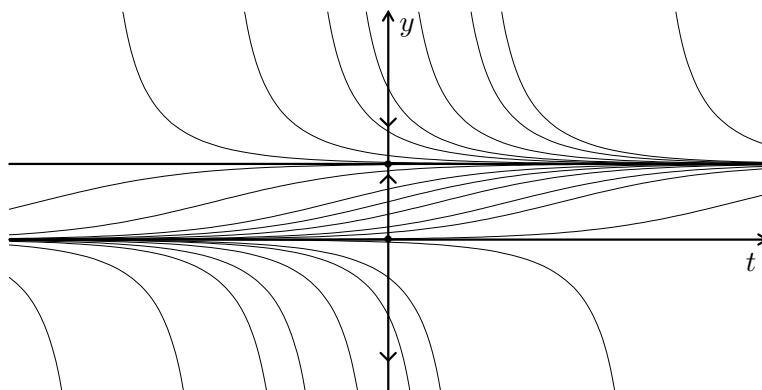
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 1 \quad .$$

Comportement des solutions dans la zone II : Dans la zone II, les solutions sont croissantes. Un raisonnement analogue à celui que nous venons d'effectuer montre qu'elles sont définies sur \mathbb{R} , admettent 0 comme limite en $-\infty$ et 1 comme limite en $+\infty$.

Comportement des solutions dans la zone III : Dans la zone III, les solutions sont décroissantes. Elles sont définies sur $] -\infty, t_0]$ et tendent vers 0 en $-\infty$ par les arguments précédents. Pour préciser leur comportement si $t > t_0$, remarquons qu'on a dans cette zone : $f(t, y) < -y^2$, donc que $\varphi'(t) < -\varphi^2(t)$, c'est à dire que la fonction $h = 1/\varphi$ vérifie $h'(t) \geq 1$ pour tout $t \geq t_0$, donc $h(t) \geq 1/y_0 + t - t_0$ si $t \geq t_0$. Mais h est négative, donc ceci n'est possible que si $t < t_0 - 1/y_0$. On a donc : $b \leq t_0 - 1/y_0$ et comme ci-dessus la fonction b ne peut pas avoir une limite finie au point b par le théorème de Cauchy-Lipschitz, donc :

$$\lim_{t \rightarrow b} \varphi(t) = -\infty \quad .$$

De même, dans la zone I les solutions sont décroissantes, donc vérifient : $y \geq y_0$ si $t \leq t_0$, donc $y^2 \geq y_0 y$, d'où $f(t, y) \leq (-1 + 1/y_0) y^2$. Comme $y_0 > 1$, on a : $c = 1 - 1/y_0 > 0$ et $f(t, y) \leq -c y^2$, et on montre comme ci-dessus que $h = 1/\varphi$ vérifie : $h(t) \leq 1/y_0 + c(t - t_0)$ si $t \leq t_0$. On en conclut de même que : $a \geq t_0 - 1/(c y_0)$ et que la fonction φ tend vers $+\infty$ au point a . Dans les zones I et III, les solutions ne sont donc pas définies sur \mathbb{R} mais "explosent" en temps négatif (resp. positif), et les courbes intégrales admettent des asymptotes verticales, comme illustré sur le dessin suivant.



Exercice 12 Résoudre algébriquement l'équation logistique $y' = y(1 - y)$ et retrouver les résultats précédents.

Les arguments employés ci-dessus sont formalisés dans les exercices suivants.

Exercice 13 Soient $\Omega = \mathbb{R} \times]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Soit $\varphi : J \rightarrow]a, b[$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$. On suppose que $J =]t_1, t_2[$ avec $t_k \in \mathbb{R}$ et que φ admet une limite au point t_k , où $k \in \{1, 2\}$. Montrer que :

$$\lim_{t \rightarrow t_k} \varphi(t) = a \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow t_k} \varphi(t) = b.$$

Exercice 14 Soit U un intervalle ouvert de \mathbb{R} et soit $X : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 . Soit φ une solution maximale de l'équation autonome $y' = X(y)$. On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p \in U$ tels que φ est définie sur l'intervalle $[t_0, +\infty[$ et vérifie : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = p$. Montrer que $X(p) = 0$ (on pourra raisonner par l'absurde).