Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2014-2015

Chapitre 11 : Fonctions convexes

Rappelons qu'une partie $\mathcal{C}$ d'un espace affine est *convexe* si et seulement si pour tous points $A\,,\,B \in \mathcal{C}$ le segment $[AB]$ est inclus dans $\mathcal{C}$, c'est à dire que pour tout réel $t \in [0\,,\,1]$ on a : $t\,A + (1-t)\,B \in \mathcal{C}$, et que les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

1 Définitions et premières propriétés

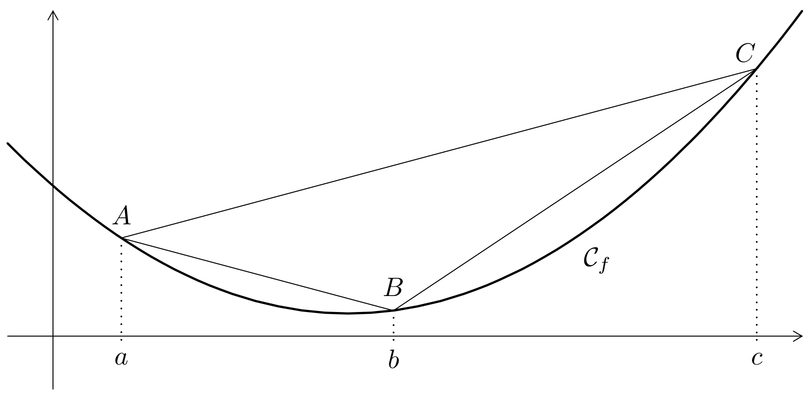
Définition 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\;:\;I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est convexe si et seulement si pour tous points $a\,,\,b \in I$ et pour tout réel $t \in [0\,,\,1]$ on a :*

$$f\big(\,t\,a + (1-t)\,b\,\big) \leqslant t\,f(a) + (1-t)\,f(b) \quad .$$

Interprétation géométrique : on peut échanger a et b dans cette inégalité (en posant $t' = 1-t$) et elle est toujours vérifiée si $a = b$: il suffit donc de la vérifier si $a < b \in I$, et elle signifie que sur l'intervalle $[a\,,\,b]$ le graphe $\mathcal{C}_f$ de f est situé **en dessous de sa corde** entre a et b , c'est à dire du segment reliant $\big(a\,,\,f(a)\big)$ à $\big(b\,,\,f(b)\big)$, ce qui s'écrit aussi :

$$(*) \qquad f(x) \leqslant f(a) + \frac{x-a}{b-a}\,\big(f(b) - f(a)\big) \text{ pour tout } x \in\; [a\,,\,b] \quad .$$

D'autre part, en notant $\mathcal{E}_f = \{(x\,,\,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \in I \;\text{ et }\; y \geqslant f(x)\,\}$ l'*épigraphe* de f , la fonction f est convexe si et seulement si $\mathcal{E}_f$ est une partie convexe du plan.



Proposition 1 Inégalité des pentes. *Si $f\;:\;I \to \mathbb{R}$ est convexe, on a :*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \qquad \textit{pour tous } a < b < c \in I \quad .$$

Démonstration : en posant $A = \big(a\,,\,f(a)\big)$, $B = \big(c\,,\,f(b)\big)$ et $C = \big(c\,,\,f(c)\big)$, le point B est situé en dessous de la corde $[AC]$, et les inégalités ci-dessus signifient que la pente de la droite (AC) est comprise entre celle de (AB) et celle de (BC) , ce qui est clair géométriquement. D'un point de vue analytique, la première inégalité résulte de $(*)$ (appliqué à $x = b \in [a\,,\,c]$), et la seconde s'en déduit puisque :

$$f(c) - \frac{c-b}{c-a}\,\big(f(c)-f(a)\big) \;=\; f(a) + \frac{b-a}{c-a}\,\big(f(c)-f(a)\big) \;\geqslant f(b) \quad .$$

On aurait aussi pu poser : $b = t\,a + (1-t)\,c$ pour se ramener à la définition 1...

Proposition 2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, son graphe est situé* **au dessus de ses tangentes**, *c'est à dire que si f est dérivable en un point $a \in I$, on a :*

$$f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\, f'(a) \qquad \textit{pour tout } x \in I \quad .$$

Démonstration : si $x = a$ l'inégalité est vraie. Si $x > a$, pour tout $y \in]\, a \,,\, x\, [$ on obtient :

$$\frac{f(y)-f(a)}{y-a} \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

en appliquant l'inégalité des pentes à $a < y < x$, et en faisant tendre y vers a on en déduit :

$$f'(a) \leqslant \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad \text{donc :} \qquad f(x) \geqslant f(a) + (x-a)\, f'(a) \quad .$$

Enfin, si $x < a$, pour tout réel y tel que $x < y < a$ l'inégalité des pentes montre que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(a)-f(y)}{a-y} = \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$$

et en faisant tendre y vers a on obtient : $\dfrac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant f'(a)$, d'où le résultat.

Proposition 3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f' est croissante.*

Démonstration : supposons f convexe, et soient $a < b \in I$. Pour tout réel $a < x < b$, l'inégalité des pentes montre que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = p(a\,,\,b) \leqslant \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

donc en faisant tendre x vers a on en déduit que : $f'(a) \leqslant p(a\,,\,b)$, et en faisant tendre x vers b on en déduit que : $p(a\,,\,b) \leqslant f'(b)$, d'où $f'(a) \leqslant f'(b)$ et la fonction f' est donc croissante. Réciproquement, si f' est croissante, pour tous $a < b \in I$ et tout $x \in]\, a\,,\, b\,[$ il existe d'après le théorème des accroissements fini des réels $\alpha \in]\, a\,,\, x\,[$ et $\beta \in]\, x\,,\, b\,[$ tels que :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(\beta)$$

et on a : $\alpha < \beta$ donc $f'(\alpha) \leqslant f'(\beta)$, et on obtient : $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant \dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}$, d'où :

$$f(x) \leqslant \frac{b-x}{b-a}\, f(a) + \frac{x-a}{b-a}\, f(b) = f(a) + \frac{x-a}{b-a}\big(f(b)-f(a)\big)$$

et cette inégalité reste vraie si $x = a$ ou $x = b$. D'après $(*)$, on en conclut que f est convexe.

Corollaire 1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable. La fonction f est convexe si et seulement si la fonction f'' est à valeurs positives ou nulles.*

Définition 2 *Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite concave si la fonction $-f$ est convexe.*

Le graphe d'une fonction concave est donc situé au dessus de ses cordes et en dessous de ses tangentes, et une fonction deux fois dérivable f est concave si et seulement si la fonction f'' est à valeurs négatives ou nulles.

Exercice 1 Montrer les inégalités suivantes en utilisant les résultats ci-dessus.

a) $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout réel x.

b) $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout réel $x > -1$.

c) $\dfrac{2}{\pi}\, x \leqslant \sin(x) \leqslant x$ pour tout $x \in \left[0\,,\, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

d) $\sqrt{1+x} \geqslant 1 + \dfrac{x}{2}$ pour tout réel $x \geqslant -1$.

2 Inégalités de convexité

Théorème 1 Inégalité de Jensen. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, si $x_1, \dots, x_n \in I$, et si les réels $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ vérifient : $\alpha_k \geqslant 0$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant n$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, on a :*

$$f\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, x_k\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, f(x_k) \quad .$$

Démonstration : l'épigraphe $\mathcal{E}_f$ étant convexe, si $A, B \in \mathcal{E}_f$ tout barycentre à coefficients positifs ou nuls de A et B appartient à $\mathcal{E}_f$ puisqu'il s'écrit $t\,A + (1-t)\,B$ avec $t \in [0\,,\,1]$. Par associativité du barycentre, on en déduit que si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_f$, tout barycentre à coefficients positifs de $A_1, \dots, A_n$ appartient à $\mathcal{E}_f$, d'où le résultat.
Remarque : comme dans la première composition du CAPES 2013, on peut aussi prouver ce résultat par récurrence : le cas $n = 1$ et l'hérédité si $\alpha_{n+1} = 0$ sont évidents, et si $\alpha_{n+1} \neq 0$ l'hérédité découle de la définition 1 et de l'associativité du barycentre dans $\mathbb{R}$ qui s'écrit :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k\, x_k \;=\; \alpha_{n+1}\; x_{n+1} + (1-\alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}}\, x_k \quad .$$

Si f est concave, on obtient bien sûr la même inégalité *inversée*, qu'on emploie la plupart du temps sous la forme :

$$f\Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\Big) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \quad .$$

Exercice 2 En utilisant la concavité du logarithme, montrer l'inégalité :

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

pour tous réels $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$, appelée *l'inégalité arithmético-géométrique*.

Exercice 3 Pour tous réels $x_1, \dots, x_n > 0$ et $p \neq 0$, on pose :

$$M_p(x_1, \dots, x_n) = \Big(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

a) Montrer que si $x_1, \dots, x_n > 0$ et $r \geqslant 1$, on a : $M_r(x_1, \dots, x_n) \geqslant M_1(x_1, \dots, x_n)$.
b) En déduire que si $x_1, \dots, x_n > 0$ et $p \geqslant q > 1$, on a :

$$M_p(x_1, \dots, x_n) \geqslant M_q(x_1, \dots, x_n) \quad .$$

On pourra poser $r = \dfrac{p}{q}$ et $y_k = (x_k)^{\frac{1}{q}}$ si $1 \leqslant k \leqslant n$.
c) Montrer que pour tous réels $x_1, \dots, x_n > 0$ et $p \neq 0$, on a :

$$M_{-p}(x_1, \dots, x_n) = \Big(M_p\Big(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\Big)\Big)^{-1} \quad .$$

On fixe désormais des réels $x_1, \dots, x_n > 0$ et pour tout réel $p \neq 0$ on pose :

$$f(p) = M_p(x_1, \dots, x_n) \quad .$$

d) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
e) Déterminer la limite de f en 0 et en déduire qu'elle se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ continue et croissante sur $\mathbb{R}$. On pose donc : $M_0(x_1, \dots, x_n) = \widetilde{f}(0)$: calculer $M_0(x_1, \dots, x_n)$.
f) En déduire des inégalités entre M_{-1} (*moyenne harmonique*), M_0 (*moyenne géométrique*), M_1 (*moyenne arithmétique*) , M_2 (*moyenne quadratique*) et le plus petit et le plus grand des réels x_k pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

3 Régularité des fonctions convexes

Si A est une partie de $\mathbb{R}$, un réel a est un *point intérieur* à A s'il existe un réel $r > 0$ tel que : $]\, a - r \,,\, a + r \,[\subset A$, et on appelle *intérieur* de A (parfois noté $Int(A)$ l'ensemble des points intérieurs à A. Si A est un intervalle quelconque d'extrémités a et b, l'intérieur de A est tout simplement l'intervalle *ouvert* $]\, a \,,\, b \,[$.

Théorème 2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, elle est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I, et pour tous réels $a < b$ intérieurs à I on a :*

$$f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b) \quad .$$

En particulier, les fonctions f_g et f_d sont croissantes.

Corollaire 2 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, elle est continue sur l'intérieur de I.*

Aux extrémités de I, elle n'est pas forcément continue (donc *a fortiori* pas dérivable à droite ou à gauche) comme le montre l'exemple de la fonction $f : [0 \,,\, 1] \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 0$ si $0 < x < 1$ et $f(0) = f(1) = 1$, qui est convexe.

Démonstration : si $a \in Int(I)$, il existe des points b, $c \in Int(I)$ tels que $c < a < b$, et nous les fixons. Pour tous réels x, y vérifiant $c < x < a < y < b$, l'inégalité des pentes implique :

$$p_1 = \frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = p_2 \qquad (1)$$

et en posant $C = \max(\,|p_1|\,,\,|p_2|\,)$ on obtient : $|\,f(z) - f(a)\,| \leqslant C \ |z - a|$ pour tout $z \in]\, c \,,\, b \,[$ ce qui prouve le corollaire (qu'on peut aussi déduire aisément du théorème). De plus, pour tous réels x, x' vérifiant $c < x < x' < a < b$, on obtient de même :

$$p_-(x) = \frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leqslant \frac{f(a) - f(x')}{a - x'} \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

donc la fonction $p_- :]\, c \,,\, a \,[\to \mathbb{R}$ est croissante et majorée, donc elle admet une limite $f'_g(a)$ au point a. De même, pour tous réels y, y' vérifiant $c < a < y < y' < b$, on a :

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant \frac{f(y) - f(a)}{y - a} \leqslant \frac{f(y') - f(a)}{y' - a} = p_+(y')$$

donc la fonction $p_+ :]\, a \,,\, b \,[\to \mathbb{R}$ est croissante et minorée, donc elle admet une limite $f'_d(a)$ au point a. Enfin, en faisant tendre x et y vers a dans les inégalités (1) on obtient :

$$\frac{f(a) - f(c)}{a - c} \leqslant f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui prouve le théorème en échangeant les rôles des points a, b et c.

La fonction "valeur absolue" est convexe, de même que la fonction affine par morceaux $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $h(p) = p^2$ si $p \in \mathbb{Z}$, donc si f est convexe il peut y avoir une infinité de points où elle n'est pas dérivable. Par contre, on a le théorème suivant.

Théorème 3 *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, elle est dérivable en dehors d'un ensemble au plus dénombrable.*

Démonstration : en posant $\mathcal{D} = \{a \in Int(I) \,/\, f'_g(a) < f'_d(a)\}$, la fonction f est dérivable en tout point de $Int(I) \setminus \mathcal{D}$, et comme $I \setminus Int(I)$ contient au plus deux points il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable pour conclure. Mais pour tout point $a \in \mathcal{D}$ il existe un nombre rationnel $\varphi(a)$ tel que : $f'_g(a) < \varphi(a) < f'_d(a)$ puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et si $a < b \in \mathcal{D}$ le théorème 2 montre qu'on a : $f'_g(a) < \varphi(a) < f'_d(a) \leqslant f'_g(b) < \varphi(b) < f'_d(b)$ donc $\varphi(a) \neq \varphi(b)$. L'application $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{Q}$ est donc injective, et comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable l'ensemble $\mathcal{D}$ est au plus dénombrable.