Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2014-2015

Interrogation du 18 Décembre 2014

Durée : 1 heure ; Barème indicatif : 10 points par exercice

Exercice 1

On considère une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un segment $[a,b]$.

1. Montrer que si f est une fonction affine, alors
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. À l'aide d'une formule de Taylor en $(a+b)/2$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ que l'on calculera telle que
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq C(b-a)^3 \sup_{[a,b]} |f''|.$$

3. En déduire, pour tout $n > 0$ entier, l'inégalité
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \left(k+\frac{1}{2}\right)\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq C\frac{(b-a)^3}{n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.$$

Exercice 2

1. **Question de cours.** Montrer que la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$
est convergente.

2. À l'aide d'une formule de Taylor, montrer l'inégalité
$$\forall x \in]0,\infty[,\ 0 \leq x - \ln(1+x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

3. En conclure que la série
$$\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
est convergente.

4. En déduire le développement asymptotique suivant :
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln(N) + \gamma + o(1),$$
où $\gamma \in \mathbb{R}$ est une constante que l'on ne cherchera pas à calculer.