Universités Paris 6 et Paris 7 | Analyse (UE 3)
M1 MEEF | 2014-2015

Interrogation du 18 Décembre 2014 : Corrigé

Exercice 1

1. Par linéarité, il suffit de le vérifier pour les fonctions $f_0 : x \mapsto 1$ et $f_1 : x \mapsto x$. On a bien
$$\int_a^b 1\mathrm{d}x = (b-a) = (b-a)f_0\left(\frac{a+b}{2}\right),$$
et
$$\int_a^b x\mathrm{d}x = \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2} = (b-a)f_1\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. On note $c = \frac{a+b}{2}$. La formule de Taylor-Lagrange en c donne l'existence, pour tout $x \in [a,b]$, d'un réel $\theta_x \in [a,b]$ avec
$$f(x) = \underbrace{f(c) + (x-c)f'(c)}_{=g(x),\ \text{fonction affine}} + \frac{1}{2}(x-c)^2 f''(\theta_x).$$
Notamment, on a l'inégalité
$$|f(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2}(x-c)^2 \sup_{[a,b]} |f''|,$$
ce qui donne
$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b \frac{1}{2}(x-c)^2 \sup_{[a,b]}|f''|\mathrm{d}x \\ = \frac{1}{6}\left[(x-c)^3\right]_a^b \sup_{[a,b]}|f''| \\ = \frac{1}{24}(b-a)^3 \sup_{[a,b]}|f''|. \qquad (1)\end{aligned}$$
D'autre part, comme g est affine, la question 1. donne :
$$\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)g(c) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)f(c). \qquad (2)$$
En rassemblant (1) et (2), on trouve le résultat avec $C = \frac{1}{24}$.

3. Soit $n \geq 1$, on note $\delta = \frac{b-a}{n}$. On applique la formule précédente sur l'intervalle $[a+k\delta, a+(k+1)\delta]$, pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$ (remarquer que $a + n\delta = b$). On a alors
$$\left|\int_{a+k\delta}^{a+(k+1)\delta} f(x)\mathrm{d}x - f(a+(k+1/2)\delta)\right| \leq \frac{\delta^3}{24}\sup_{[a,b]}|f''|.$$

En remarquant que $\int_a^b = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\delta}^{a+(k+1)\delta}$, on obtient alors

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+1/2)\delta) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+k\delta}^{a+(k+1)\delta} f(x)\mathrm{d}x - f(a+(k+1/2)\delta) \right| \\
&\leq \frac{n\delta^3}{24} \sup_{[a,b]} |f''| \\
&= \frac{(b-a)^3}{24n^2} \sup_{[a,b]} |f''|.
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. On peut utiliser l'inégalité $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$, valable pour $n \geq 2$. On a alors

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{N} \leq 1.$$

   Cela montre que $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées. Il s'agit donc d'une série convergente.

2. Si on pose $f(x) = \ln(1+x)$, on a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad \text{et} \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

   La formule de Talor-Lagrange à l'ordre 2 appliquée en 0 montre que pour tout $x > 0$, il existe $\theta_x \in [0,x]$ tel que

$$\ln(1+x) = f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f'(\theta_x) = x - \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+\theta_x)^2}$$

   De sorte que

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} \frac{1}{(1+\theta_x)^2} \geq 0.$$

   De même la formule de Talor-Lagrange à l'ordre 3 appliquée en 0 montre que pour tout $x > 0$, il existe $\eta_x \in [0,x]$ tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \frac{1}{(1+\eta_x)^3},$$

   de sorte que

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \frac{1}{(1+\eta_x)^3} \leq \frac{x^2}{2}.$$

3. La question précédente montre que

$$0 \leq \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2}.$$

   Par conséquent, les termes de la série $\sum \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ sont positifs et majorés par les termes de la série convergente $\sum \frac{1}{2n^2}$, ce qui montre que la série est convergente.

4. On a

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) &= \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-(\ln(n+1)-\ln(n))\right)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-(\ln(N+1)-\ln(1))\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)-\ln\left(1+\frac{1}{N}\right)+0\\
&= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-\ln(N)+o(1) \qquad (3)
\end{aligned}
$$

D'autre part, la suite $\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\right)_N$ converge vers une limite γ, ce qui peut s'écrire

$$
\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\gamma+o(1). \qquad (4)
$$

En regroupant (3) et (4), on obtient le résultat.