# Interrogation du 5 Mars 2015

*Durée : 1 heure*
*Barème indicatif : 6 + 14*

## Exercice 1

Soit $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels **deux à deux distincts**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } x \geq r_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $f$ sa somme.
2. On note $D = \{r_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que la fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$.
3. Soit $k$ un entier naturel. Montrer que $f - u_k$ est continue au point $r_k$.
4. En déduire que $f$ n'est continue en aucun point de $D$.

## Exercice 2

On considère la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *nombres de Bell*, définie par la relation de récurrence

$$\begin{cases} B_0 &= 1\,, \\ B_{n+1} &= \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On veut trouver une expression plus explicite de $B_n$ en étudiant la série entière

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!}\, z^n\,.$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'inégalité $B_n \leq n!$.
2. En déduire que le rayon de convergence $R$ de la série entière $f(z)$ est strictement positif.
3. Montrer la relation
$$\forall\ t \in ]-R\,,R\,[\,,\ f'(t) = e^t f(t)\,.$$
4. Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-e^t} f(t)$ est constante sur l'intervalle $]-R\,,R\,[$, et donner sa valeur.

5. Justifier, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'égalité

$$(e^t)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} t^n.$$

En déduire, en considérant une série double, l'égalité

$$e^{e^t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{t^n}{n!} .$$

6. En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la relation

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} .$$