Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2014-2015

# Interrogation du 5 Mars 2015 : corrigé

## Exercice 1

**Remarque :** *Cet exercice montre que tout ensemble dénombrable peut être l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Par exemple, il existe une fonction continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mais discontinue sur $\mathbb{Q}$.*

*Par contre, un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$ n'est pas nécessairement l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction. Par exemple, il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{Q}$ mais discontinue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.*

1. La fonction $u_n$ vérifie $\sup_{\mathbb{R}} |u_n| = 2^{-n}$. De sorte que la série $\sum \sup_{\mathbb{R}} |u_n|$ est la série convergente $\sum 2^{-n}$. Par conséquent, la série $\sum u_n$ converge normalement, donc uniformément..

2. La fonction $u_n$ est constante sur les intervalles $]-\infty, r_n[$ et $]r_n, \infty[$, par conséquent, elle est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{r_n\}$. En particulier, pour tout $n$, comme $\mathbb{R} \setminus D \subset \mathbb{R} \setminus \{r_n\}$, la fonction $u_n$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$.

   La série $\sum u_n$ est donc une série de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus D$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$, donc sur $\mathbb{R} \setminus D$. Comme une limite uniforme de fonctions continue est continue, $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus D$.

3. La fonction $f - u_k$ est la limite de la suite $\left(\left(\sum_{n=0}^{N} u_n\right) - u_k\right)_N$. Pour $N > k$, le terme général de suite vaut $\sum_{n=0}^{k-1} u_n + \sum_{n=k+1}^{N} u_n$. Les fonction $u_n$, avec $0 \leq n \leq k-1$ ou $n \geq k+1$ sont continues en $r_k$. Par les mêmes arguments qu'en question 1. et 2., on montre que la limite de $\sum_{n=0}^{k-1} u_n + \sum_{n=k+1}^{N} u_n$ est continue en $r_k$.

4. On a $\lim_{x \to r_k -} u_k(x) = 0$ et $\lim_{x \to r_k +} u_k(x) = 2^{-k}$. Par conséquent la fonction $u_k$ n'est pas continue en $r_k$. Si $f$ était continue en $r_k$, alors $u_k = f - (f - u_k)$ le serait aussi comme combinaison linéaire de fonctions continues en $r_k$. Ce n'est pas le cas, par conséquent, $f$ n'est continue en aucun $r_k$, donc elle n'est continue en aucun point de $D$.

## Exercice 2

**Remarque :** *On peut en fait montrer que les nombres de Bell $B_n$ correspondent au nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. Par exemple, les partitions de $\{1, 2, 3\}$ sont*

$$\{\{1,2,3\}\}, \ \{\{1,2\},\{3\}\}, \ \{\{1,3\},\{2\}\}, \ \{\{2,3\},\{1\}\}, \quad \textit{et } \{\{1\},\{2\},\{3\}\},$$

*de sorte que $B_3 = 5$.*

*Pour montrer que le nombre de partition de $\{1, \ldots, n\}$ est bien donné par $B_n$, il suffit de montrer que ce nombre vérifie la relation de récurrence vérifiée par $B_n$. La valeur initiale est claire. La relation de récurrence s'obtient par un argument combinatoire (exercice !).*

1. On procède par récurrence. On pose $\mathcal{P}(n) = "\forall k \leq n,\ B_k \leq k!"$. On a bien $B_0 = 1 \leq 0! = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Pour $n$ entier fixé, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vérifiée. On a alors

$$\begin{aligned} B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \\ \leq n! \sum_{k=0}^{n} 1 \\ = (n+1)!. \end{aligned}$$

   On a bien $B_{n+1} \leq (n+1)!$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Par récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n$, donc que $B_n \leq n!$ pour tout $n$.

2. La question 1. montre que $\frac{B_n}{n!}$ est inférieur à 1. On a donc $\left|\frac{B_n}{n!} z^n\right| \leq |z|^n$. Pour $|z| < 1$, la série $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ voit donc le module de son terme général majoré par $|z|^n$, qui est le terme général d'une série convergente. Par conséquent, $\sum \frac{B_n}{n!} z^n$ converge dès que $|z| < 1$. Le rayon $R$ de $f(z)$ est donc au moins égal à 1, il est notamment strictement positif.

3. Sur l'intervalle $]-R, R[$, la fonction $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est donnée par la somme de la série des dérivées. On a donc

$$\begin{aligned} f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{B_n}{n!} t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{(n-1)!} t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} B_k \right) t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k t^k}{k!} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right). \end{aligned}$$

   On reconnaît le produit de Cauchy des séries entières $\sum \frac{B_k t^k}{k!}$ (qui est $f(t)$) et $\sum \frac{t^k}{k!}$ (qui est $e^t$). On a donc bien $f'(t) = e^t f(t)$ pour $t \in ]-R, R[$.

4. La fonction $t \mapsto e^{-e^t} f(t)$ est dérivable sur $]-R, R[$. On obtient

$$\left(e^{-e^t} f(t)\right)' = e^{-e^t} \left(-e^t f(t) + f'(t)\right) = 0.$$

   La fonction est donc constante, égale à $e^{-e^0} f(0) = e^{-1} \times 1 = \frac{1}{e}$.

5. On a

$$(e^t)^k = e^{tk} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tk)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} t^n.$$

   On écrit

$$e^{e^t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{t^n}{n!}.$$

La dernière égalité est une intervertion de sommes, qui est justifiée car la série double converge absolument :

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|t|^n k^n}{n!k!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{|t|k}}{k!}=e^{e^{|t|}}<\infty.$$

6. D'après la question 4, on a $f(t)=\frac{1}{e}e^{e^t}$ pour tout $t\in]-R,R[$. On a donc l'égalité entre séries entières
$$\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\right)\frac{t^n}{n!}$$
Comme deux séries entières définissant des fonctions égales ont en fait les mêmes coefficients, on trouve l'égalité demandée.