

Chapitre 6 : Séries numériques

1 Généralités

Définition 1 Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes. La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0$$

et appelée les sommes partielles, et est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$. **Lorsqu'elle converge, sa limite**

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

est appelée la somme de la série. Dans ce cas, pour tout entier $n \geq n_0$ la série $\sum_{p \geq n+1} u_p$ est convergente et sa somme R_n est appelée le reste d'ordre n de la série, on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = S_n + R_n = \sum_{k=n_0}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \quad \text{pour tout entier } n \geq n_0$$

et la suite $(R_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

On a donc : $S_{n_0} = u_{n_0}$ et $S_n - S_{n-1} = u_n$ pour tout entier $n > n_0$, et réciproquement toute suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ peut être considérée comme une série en posant $u_{n_0} = v_{n_0}$ et $u_n = v_n - v_{n-1}$ pour tout entier $n > n_0$.

Proposition 1 Si $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ convergent et si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors $\sum_{n \geq n_0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n .$$

Attention ! Si $\sum (u_n + v_n)$ converge, il faut vérifier la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ avant d'écrire :

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n .$$

Proposition 2 Si la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge, la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.

Quand $(u_n)_{n \geq n_0}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ diverge grossièrement. Si la série converge, on a pour tout entier $n > n_0$ (transformation d'Abel) :

$$u_n = R_{n-1} - R_n .$$

Proposition 3 Pour tout $a \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si : $|a| < 1$, et on a dans ce cas : $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.

2 Séries à termes positifs

Si on a : $u_n \geq 0$ pour tout entier n , la série $\sum u_n$ est croissante, donc elle converge si et seulement si elle est majorée, et si elle diverge elle tend vers $+\infty$. On en déduit le théorème de comparaison suivant.

Théorème 1 Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles **positives**. On suppose qu'il existe un entier naturel $N \geq n_0$ tel que : $u_n \leq v_n$ pour tout entier $n \geq N$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Corollaire 1 Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites **positives** telles que : $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge, et si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Théorème 2 Soient $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ deux suites réelles **positives** telles que : $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Lorsqu'elles convergent, leurs restes sont équivalents, et lorsqu'elles divergent, leurs sommes partielles sont équivalentes.

Exercice 1 Montrer que $\frac{1}{n} \sim \ln(n+1) - \ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et qu'on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

Exercice 2 Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a : $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et en déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Proposition 4 Règle de Cauchy. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle positive telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)^{\frac{1}{n}} = \ell \in \mathbb{R}_+.$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Proposition 5 Règle de d'Alembert. Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle strictement positive telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell \in \mathbb{R}_+.$$

- Si $\ell < 1$ alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.

Dans les deux cas, on ne peut pas conclure si $\ell = 1$ comme le montrent les exemples de $u_n = 1/n^2$ et $v_n = n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Proposition 6 Critère de Riemann. Pour tout réel α , la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si : $\alpha > 1$.

Exercice 3 Montrer que pour tout réel $\alpha > 0$ et tout entier $n \geq 2$, on a :

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^\alpha}$$

et en déduire le critère de Riemann. Montrer que si $\alpha > 1$, on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 4 Développement décimal d'un nombre réel.

a) Soit $a_0 \in \mathbb{N}$ et soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite à valeurs dans $\{0, 1, \dots, 9\}$. Montrer que la série : $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{10^n}$ est convergente. On note sa somme :

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} \quad .$$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq a_0, a_1 a_2 \dots \leq \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$$

et que la deuxième inégalité est stricte sauf si on a : $a_k = 9$ pour tout entier $k \geq n + 1$. Montrer que dans ce cas, le nombre $a_0, a_1 a_2 \dots$ est un nombre décimal, c'est à dire qu'il s'écrit : $10^{-N} p$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$.

c) Soit x un nombre réel positif : on pose $a_0 = E(x)$ où E est la partie entière, et pour tout entier $n \geq 1$ on pose : $a_n = E(10^n x) - 10 E(10^{n-1} x)$. Montrer que $a_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$ pour tout entier $n \geq 1$ et qu'on a :

$$x = a_0, a_1 a_2 \dots$$

d) On reprend les notations du c. Montrer par l'absurde que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ comprend une infinité de termes différents de 9 : on appelle une telle écriture un développement décimal propre du réel positif x . Montrer qu'un tel développement décimal propre de x est unique.

Remarque : si $x < 0$, on obtient : $x = -a_0, a_1 a_2 \dots$ où $a_0, a_1 a_2 \dots$ est le développement décimal propre de $-x$, et on obtient ainsi une suite de rationnels qui converge vers x , donc : \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} . Une propriété classique (voir l'UE Nombres) est que x est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique à partir d'un certain rang.

3 Séries absolument convergentes

Définition 2 Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. On dit que la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ converge absolument si la série $\sum_{n \geq n_0} |u_n|$ converge.

Théorème 3 Toute série absolument convergente est convergente.

Ceci permet d'appliquer les critères de la section précédente aux séries à termes de signe quelconque pour montrer leur convergence **absolue**.

Démonstration : la preuve classique utilise le critère de Cauchy (donc la complétude de \mathbb{C}) : la suite $(s_n)_{n \geq n_0}$ des sommes partielles de $\sum |u_n|$ converge, donc c'est une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq n_0, q > p \geq N \Rightarrow |s_p - s_q| < \varepsilon \quad .$$

Mais en notant $(S_n)_{n \geq n_0}$ la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ on a pour tous entiers $q > p$:

$$|S_q - S_p| = \left| \sum_{n=p+1}^q u_n \right| \leq \sum_{n=p+1}^q |u_n| = s_q - s_p$$

donc $(S_n)_{n \geq n_0}$ est aussi une suite de Cauchy, donc elle converge. Au niveau BTS (donc pour les séries à termes réels), on peut ramener cette preuve à la convergence des suites croissantes majorées (qui équivaut à la complétude de \mathbb{R}) en posant : $v_n = |u_n| - u_n$ pour tout entier $n \geq n_0$. On a donc : $0 \leq v_n \leq 2 |u_n|$ pour tout entier $n \geq n_0$, donc $\sum v_n$ converge, mais on a aussi : $u_n = |u_n| - v_n$ pour tout entier $n \geq n_0$ et comme $\sum |u_n|$ et $\sum v_n$ convergent, on en déduit la convergence de $\sum u_n$.

Théorème 4 Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes. Leur produit de

Cauchy est la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$, elle est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

4 Séries semi-convergentes

Théorème 5 Critère spécial des séries alternées Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite réelle positive décroissante convergeant vers 0. Alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente,

son reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et : $|R_n| \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 5 Démontrer ce théorème en montrant que les suites définies par :

$$a_n = \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k u_k \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k u_k$$

sont adjacentes.

5 Familles sommables et séries doubles

Les résultats suivants figurent au programme du CAPES, mais seront vraisemblablement rappelés quand il s'agira de les utiliser. On retiendra qu'en cas de convergence **absolue**, on peut permuter ou regrouper les termes d'une série sans changer sa nature ni sa somme.

Théorème 6 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente et si $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection, alors $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad .$$

Définition 3 Soient I un ensemble dénombrable et $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. La famille $(u_i)_{i \in I}$ est dite sommable si I est fini ou bien s'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow I$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument. Cela ne dépend pas de la bijection σ choisie, de même que la somme :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} \quad .$$

Théorème 7 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente et $(A_i)_{i \in I}$ une partition de \mathbb{N} (finie ou infinie). Pour tout $i \in I$ la famille $(u_j)_{j \in A_i}$ est sommable, de même que la famille $\left(\sum_{j \in A_i} u_j \right)_{i \in I}$ et on a :

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in A_i} u_j \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \quad .$$

Corollaire 2 Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Alors les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ sont convergentes et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1} \quad .$$

Exercice 6 a) Observer que ce résultat est faux pour la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

b) Le démontrer sans utiliser le théorème précédent.

c) Montrer que si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la série $\sum (u_{2n} + u_{2n+1})$ est convergente et a la même somme. La réciproque est-elle toujours vraie ?

Théorème 8 Séries doubles. Soit $(u_{p,q})_{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}}$ une famille à termes réels ou complexes. Si pour tout $p \in \mathbb{N}$ la série $\sum_{q \geq 0} |u_{p,q}|$ est convergente de somme s_p et si la série $\sum_{p \geq 0} s_p$ converge, alors les mêmes résultats sont vrais en intervertissant les variables p et q et on a :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) = \sum_{q=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) .$$

6 Exercices classiques

Exercice 7 Étudier la convergence des séries de terme généraux suivants :

a) $\frac{n^3}{n!}$.

b) $\left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

c) $\frac{n - \ln(n)}{n^3 + \cos(n)}$.

d) $\frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (séries de Bertrand). Si $\alpha = 1$, on comparera à une intégrale.

e) $\frac{1 + (-1)^n n^\alpha}{n^{2\alpha}}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

f) $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right)$.

Exercice 8 Formule de Stirling. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = e^n (n!) n^{-(n+\frac{1}{2})}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$. Montrer que la série $\sum v_n$ converge. En déduire qu'il existe un réel $K > 0$ tel que :

$$n! \sim K \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} .$$

En utilisant les intégrales de Wallis (voir le chapitre 4), montrer finalement que :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} .$$

Exercice 9 Constante d'Euler. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} .$$

a) Montrer que la série $\sum a_n$ est convergente : sa somme γ est appelée la constante d'Euler. Vérifier que : $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

b) Montrer que : $a_n \sim \frac{1}{2n^2}$ et en déduire que : $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 10 Règle de Duhamel. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle qu'il existe un réel α vérifiant :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) .$$

Montrer que si $\alpha > 1$ alors $\sum u_n$ converge, et que si $\alpha < 1$ alors $\sum u_n$ diverge. (on pourra poser : $v_n = n^{-\alpha'}$ pour tout entier $n \geq 1$ avec α' bien choisi et comparer u_n et v_n).