# Chapitre 8 : Séries entières

## 1 Rayon de convergence

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ considérons la fonction $u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par : $u_n(z) = a_n z^n$. La série de fonctions $\sum u_n$ est appelée une *série entière*, dont on étudie tout d'abord le domaine de convergence.

**Lemme 1 (Abel)** *S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$.*

**Définition 1** *Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :*

$$R = \sup\{ r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \} \in [0, +\infty].$$

Posons : $I = \{ r \in \mathbb{R}_+ \ / \ \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$. Si $r \in I$ et $0 \leqslant r' \leqslant r$, on obtient aisément : $r' \in I$, ce qui permet de montrer que $[0, R[ \subset I \subset [0, R]$, c'est à dire :
- si $|z| < R$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée
- si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

**Exercice 1** Montrer que ces deux propriétés définissent un unique réel $R \geqslant 0$.

Le lemme d'Abel premet d'en déduire un résultat plus fort :

**Théorème 1** *Si $R$ est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, cette série :*
- *converge absolument si $|z| < R$*
- *diverge grossièrement si $|z| > R$.*

*De plus, la série converge normalement sur tout disque fermé de centre $0$ et de rayon $r < R$.*

**Exercice 2** Montrer que ces deux propriétés définissent un unique réel $R \geqslant 0$.

**Corollaire 1** *La fonction somme $S$ définie par : $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur son disque de convergence, qui est le disque* **ouvert** *de centre $0$ et de rayon $R$.*

**Attention :** en général, la série $\sum a_n z^n$ ne converge **pas** normalement sur son disque de convergence, mais uniquement sur tout disque fermé **strictement** inclus dans celui-ci. Le bord du disque de convergence (défini par $|z| = R$) est parfois appelé le *cercle d'incertitude*, car tous les comportements de la série sont possibles sur ce cercle.

**Proposition 1 (règle de Cauchy)** *Si la suite $(|a_n|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty]$, le rayon de convergence $R$ de $\sum a_n z^n$ est donné par : $R = 1/\ell$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et : $R = 0$ si $\ell = +\infty$.*

**Proposition 2 (règle de d'Alembert)** *S'il existe un entier $n_0$ tel que $a_n \neq 0$ pour tout $n \geqslant n_0$ et si la suite $(|a_{n+1}/a_n|)_{n\geqslant n_0}$ admet une limite $\ell \in [0, +\infty]$, le rayon de convergence $R$ de $\sum a_n z^n$ est donné par : $R = 1/\ell$ si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, $R = +\infty$ si $\ell = 0$ et : $R = 0$ si $\ell = +\infty$.*

**Proposition 3** *Si on a : $b_n = O(a_n)$, le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum a_n z^n$. Si on a : $a_n \sim b_n$, les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont le même rayon de convergence.*

**Attention :** ces critères sont des conditions suffisantes, et n'admettent **pas de réciproque**. En particulier, pour les séries *lacunaires* admettant une infinité de termes nuls, on ne peut pas utiliser directement la règle de d'Alembert, et il faut soit utiliser le critère de d'Alembert pour les séries numériques, soit revenir à la définition.

**Exercice 3** Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\, z^n$ dans les cas suivants.

**a)** $a_n = n!$ **b)** $a_n = \dfrac{1}{n!}$ **c)** $a_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ **d)** $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\, n^n}$

**Exercice 4** Calculer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n \quad , \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} z^{n^2}\,.$$

**Proposition 4** *Si les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont notés respectivement $R$ et $R'$, leur somme et leur produit de Cauchy ont des rayons de convergence supérieurs ou égaux à $R'' = \min(R, R')$ et on a :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n \quad \textit{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n$$

*pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant : $|z| < R''$, où : $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k\, b_{n-k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

**Exercice 5** Montrer que si on a : $R \neq R'$, alors le rayon de convergence de la somme est égal à $\min(R, R')$.

## 2 Fonction somme d'une série entière

La dérivabilité des fonctions d'une variable complexe (les *fonctions holomorphes*) est hors-programme, et on se restreindra donc aux cas des séries entières (à valeurs réelles ou complexes) d'une **variable réelle**, notée désormais $x$.

**Proposition 5** *Le rayon de convergence de la série dérivée :*

$$\sum_{n\geqslant 1} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\, a_{n+1}\, x^n$$

*est égal à celui de la série $\sum a_n\, x^n$.*

**Théorème 2** *Si la série entière $\sum a_n\, x^n$ admet un rayon de convergence $R > 0$, sa fonction somme $S : ]-R\,,\,R[ \to \mathbb{C}$ définie par :*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \ \textit{pour tout } x \in ]-R\,,\,R[$$

*est de classe $C^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R\,,\,R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivation terme à terme.*

En particulier, si $R > 0$, on a :

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\,,$$

et la série entière $\sum a_n\, x^n$ s'identifie à la série de Taylor de la fonction $S$, qui détermine donc celle-là. On en déduit le résultat d'unicité suivant, qui est fondamental.

**Théorème 3** *Si les séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$ ont des rayons de convergence strictement positifs et s'il existe un réel $r > 0$ tel que :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \ \textit{pour tout réel } x \in ]-r\,,\,r[\,,$$

*alors on a : $a_n = b_n$ pour tout entier naturel $n$.*

## 3 Fonctions développables en série entière

**Définition 2** *Soit $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On dit que $f$ est développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in I$ s'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et un réel $r > 0$ tel que :*

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, h^n \text{ pour tout } h \in ]-r, r[\,.$$

*Dans ce cas, $f$ est de classe $C^\infty$ au voisinage de $x_0$ et on a : $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Réciproquement, si $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $C^\infty$, la série de Taylor de $f$ en un point $x_0$ donnée par :

$$T_{x_0}(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n\,!}\,(x - x_0)^n$$

est bien définie, mais elle peut avoir un rayon de convergence nul, et même s'il est non nul, la fonction $f$ n'est pas forcément égale à la somme de sa série de Taylor au voisinage de $x_0$.

**Exercice 6** Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$ et $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ est de classe $C^\infty$, mais n'est pas développable en série entière au voisinage de $0$.

**Exercice 7** Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^\infty$. On suppose qu'il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que : $|\, f^{(n)}(x)\,| \leqslant M^n\, n!$ pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f$ est développable en série entière au voisinage de tout point. *(Utiliser la formule de Taylor-Lagrange).*

Les théorèmes 1 et 2 impliquent :

**Proposition 6** *Si $f : ]-R, R[ \to \mathbb{C}$ admet le développement en série entière donné par : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et si on pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ pour tout $x \in ]-R, R[$, alors pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in ]-R, R[$, on a :*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!}\, a_{n+p}\, x^n \quad \text{et} \quad F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\, a_{n-1}\, x^n\,.$$

**Proposition 7 Développements usuels.** *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :*

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\, z^n \quad , \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \quad , \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1}\,,$$

$$\cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n)!}\, z^{2\,n} \quad \text{et :} \quad \sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2\,n+1)!}\, z^{2\,n+1} \text{ avec } R = +\infty\,.$$

*Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|\,z\,| < 1$, on a : $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ et : $\dfrac{1}{1+z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, z^n$ avec $R = 1$.*

*Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n\,!}\, x^n$ pour tout $x \in ]-1, 1[$, avec $R = 1$ si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $R = +\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in ]-1, 1[$, on a aussi :*

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\, x^n \quad \text{et :} \quad \arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2\,n+1}\, x^{2\,n+1} \text{ avec } R = 1\,.$$

**Proposition 8** *Si la fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ n'admet pas $0$ pour pôle, la fonction rationnelle $F$ est développable en série entière au voisinage de $0$, le rayon de convergence de la série entière obtenue est égal à la distance à l'origine de l'ensemble des pôles* **complexes** *de $F$, et $F$ est la fonction somme de cette série entière sur tout son disque de convergence.*

Pour obtenir ce développement, on utilise une décomposition en éléments simples de $F$.

**Exercice 8** **a)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ : montrer que la fonction $f : t \mapsto (1+t)^\alpha$ est l'unique solution sur l'intervalle $I = ]-1\,,\,1\,[$ de l'équation différentielle $(\star)$ : $(t+1)\,y' = \alpha\,y$ vérifiant : $y(0) = 1$.
**b)** On suppose que $(\star)$ admet une solution $g : ]-r\,,\,r\,[ \to \mathbb{R}$ avec $0 < r \leqslant 1$ de la forme :

$$g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\, t^n \qquad \text{pour tout } t \in ]-r\,,\,r\,[$$

ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à $r$. Montrer qu'on a : $a_{n+1} = (\alpha - n)\,a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire une expression explicite de $a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.
**c)** Calculer le rayon de convergence de la série entière ainsi obtenue, et en déduire que la fonction $g$ est solution de l'équation $(\star)$ sur $I$. En conclure que $f$ admet bien le développement en série entière donné par la proposition 7.

# 4 Exercices

**Exercice 9** Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière en 0. Calculer le développement et donner son rayon de convergence.

**a)** $x \mapsto \dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)^2}$ **b)** $x \mapsto e^x \sin x$ **c)** $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\arctan t^2}{t}\,dt$ **d)** $x \mapsto \arcsin x$.

**Exercice 10** Après avoir déterminé leur rayon de convergence, calculer la somme des séries entières suivantes sur leur disque de convergence.

**a)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \cosh(n)\,x^n$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)}\,x^n$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$.

**Exercice 11** Trouver toutes les solutions développables en série entière au voisinage de 0 de l'équation différentielle : $-t^2 y'' - 2ty' + y = \arctan(t)$.

**Exercice 12** Soit $T$ un entier naturel non nul et soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle non identiquement nulle et $T$-périodique, c'est à dire que : $a_{n+T} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
**a)** Calculer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\,z^n$. On note $f$ sa somme.
**b)** Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout entier naturel non nul $p$, on a :

$$\sum_{n=0}^{pT-1} a_n\,z^n = \frac{1 - z^{pT}}{1 - z^T} \sum_{k=0}^{T-1} a_k\,z^k\ .$$

En déduire que $f$ est une fonction rationnelle.