# Chapitre 10 : Équations différentielles

## 1 Équations différentielles d'ordre un et problème de Cauchy

Une équation différentielle d'ordre 1 est une relation entre $t$, $y(t)$ et $y'(t)$ pour tout $t \in I$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et où la fonction inconnue $y : I \to \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est supposée dérivable (si $n = 1$, on parle *d'équations scalaires*). On omet très souvent la variable $t$ dans la fonction inconnue $y$ pour écrire par exemple : $t\,y' + y = 0$ à la place de : $t\,y'(t) + y(t) = 0$, ce qui est un abus de notations. Pour obtenir des résultats simples, il faut se restreindre au cas des *équations sous forme résolue* où l'on peut exprimer $y'(t)$ en fonction de $t$ et $y(t)$ comme dans la définition suivante :

**Définition 1** *Une équation différentielle d'ordre* 1 *est une équation de la forme* $y' = f(t, y)$, *où* $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ *est définie sur un ouvert* $\Omega$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. *On appelle solution de cette équation différentielle toute application dérivable* $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$, *où* $I$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *vérifiant :* $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ *et* $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ *pour tout* $t \in I$.

**Exercice 1 Équation intégrale et régularité.** Montrer que si $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ est continue, si $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ vérifie : $(t, \varphi(t)) \in \Omega$ pour tout $t \in I$, et si on choisit $t_0 \in I$, alors $\varphi$ est solution de $y' = f(t, y)$ si et seulement elle est continue et vérifie pour tout $t \in I$ :

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds\,.$$

Montrer par récurrence que si la fonction $f$ est de classe $C^r$ avec $r \in \mathbb{N}$, alors toute solution $\varphi$ de l'équation $y' = f(t, y)$ est de classe $C^{r+1}$.

**Définition 2** *Soit* $y' = f(t, y)$ *une équation différentielle sur un ouvert* $\Omega$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, *soient* $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{C}^n$ *et* $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{C}^n$ *deux solutions de cette équation différentielle. Si* $I_1 \subseteq I_2$ *et si, pour tout* $t \in I_1$, *on a* $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, *on dit que la solution* $\varphi_2$ *est un prolongement de la solution* $\varphi_1$. *Si* $I_1 \neq I_2$, *on dit que c'est un prolongement strict.*

**Définition 3** *Soient* $y' = f(t, y)$ *une équation différentielle sur un ouvert* $\Omega$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$, *et* $\varphi : I \to \mathbb{C}^n$ *une solution de cette équation différentielle. L'application* $\varphi$ *est appelée solution maximale de l'équation différentielle si elle n'admet pas de prolongement strict.*

**Définition 4** *Soient* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$. *On dit que* $f$ *est localement lipschitzienne par rapport à* $y$ *si tout point* $(t_0, y_0) \in \Omega$ *admet voisinage* $V$ *tel qu'il existe une constante positive* $k$ *vérifiant :*

$$\forall (t, y_1) \in V\,,\ \forall (t, y_2) \in V\,,\ \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leqslant k\, \|y_1 - y_2\|\,,$$

*la norme étant l'une quelconque des normes (toutes équivalentes) sur* $\mathbb{C}^n$. *En particulier, toute fonction de classe* $C^1$ *est localement lipschitzienne par rapport à* $y$.

**Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz)** *Soient* $\Omega$ *un ouvert de* $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ *et* $f : \Omega \to \mathbb{C}^n$ *une application continue et localement lipschitzienne par rapport à* $y$. *Pour tout* $(t_0, y_0) \in \Omega$, *il existe une unique solution maximale* $\varphi$ *de l'équation différentielle* $y' = f(t, y)$ *satisfaisant la condition initiale* $\varphi(t_0) = y_0$. *Elle est définie sur un intervalle* **ouvert** $I$ *contenant* $t_0$.

**L'intervalle $I$ dépend en général de la condition initiale $(t_0, y_0)$.**

**Exemple 1** Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(t\,,\,y) = y^2$ qui est de classe $C^1$. L'équation $y' = f(t\,,\,y)$ admet la fonction nulle $\varphi_0 : t \mapsto 0$ comme solution sur $\mathbb{R}$ (donc maximale), donc si une solution $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de l'équation vérifie $\varphi(t_0) = 0$ avec $t_0 \in I$, le théorème de Cauchy-Lipschitz pour la condition initiale $\varphi(t_0) = 0$ montre que $\varphi = \varphi_0$. Par conséquent, les solutions non identiquement nulles $y : I \to \mathbb{R}$ vérifient : $-y'(t) \,/\, y^2(t) = -1$ pour tout $t \in I$, et en intégrant cette relation on en déduit qu'il existe une constante $c$ vérifiant : $1 \,/\, y(t) = c - t$ pour tout $t \in I$, d'où : $y(t) = 1 \,/\, (c - t)$ et $I$ ne contient donc pas le réel $c$ : les solutions maximales autres que $\varphi_0$ ne sont donc pas définies sur $\mathbb{R}$ tout entier mais uniquement sur des intervalles $]-\infty\,,\,c[$ ou $]c\,,\,+\infty[$ et elles "explosent" au point $c$, alors que l'équation est parfaitement régulière.

## 2 Équations à variables séparables

Il s'agit des équations scalaires de la forme $(E) : y' = h(t)\,g(y)$, où la fonction $h : I \to \mathbb{C}$ est continue et $g : J \to \mathbb{C}$ est localement lipschitzienne. Pour tout $c \in J$ tel que $g(c) = 0$, la fonction constante $\varphi_c : t \mapsto c$ est solution de $(E)$ sur $I$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet donc d'affirmer que si $\varphi : I_0 \to J$ est une solution non constante de $(E)$ avec $I_0 \subset I$, la fonction $g \circ \varphi$ ne s'annule nulle part. Elle est donc à valeurs dans un intervalle $J_0 \subset J$ sur lequel $g$ ne s'annule pas et où on peut récrire $(E)$ sous la forme $y'/g(y) = h(t)$. Soit $G$ une primitive de $1/g$ et soit $H$ une primitive de $h$ : l'équation $(E)$ équivaut donc à la constance de la fonction $G \circ \varphi - H$, c'est à dire qu'on a : $G\big(\varphi(t)\big) = H(t) + c$ pour tout $t \in I_0$, avec $c \in \mathbb{C}$ fixé. Si l'on sait résoudre l'équation $G(y) = c$, on obtient ainsi les solutions de $(E)$.

**Exemple 2** Considérons l'équation $t\,y' + y = 0$ de l'introduction. Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ où $t \in \mathbb{R}_-^*$ on peut l'écrire sous la forme :

$$y' = -\frac{1}{t}\,y$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz, puis se pose un problème de recollement en $t = 0$. Si l'on considère une solution sur $\mathbb{R}$ on obtient tout d'abord comme ci-dessus des constantes $c_+$ et $c_-$ telles que :

$$y(t) = \frac{c_-}{t} \quad \text{si } t < 0 \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{c_+}{t} \quad \text{si } t > 0 \quad ,$$

et cette fonction n'est donc continue en $t = 0$ que si $c_+ = c_- = 0$. Sa seule solution sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle, et elle admet sinon des solutions maximales sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

**Exercice 2** Résoudre les équations différentielles suivantes.
**a)** $y' = t\,y^2 + t$
**b)** $y' = e^t\,\sin(y)$
**c)** $t^3\,y' + y^3 = 0$.

## 3 Équations d'ordre supérieur

**Définition 5** *Une équation différentielle scalaire d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une équation de la forme $(E_n) : y^{(n)} = f(t\,,\,y\,,\,y'\,,\,\ldots\,,\,y^{(n-1)})$, où $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est définie sur un ouvert $\Omega$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$. Une solution de cette équation est une fonction $n$ fois dérivable $\varphi : I \to \mathbb{C}$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, vérifiant pour tout $t \in I$ :*

$$\big(t\,,\,\varphi(t)\,,\,\varphi'(t)\,,\,\ldots\,,\,\varphi^{(n-1)}(t)\big) \in \Omega \quad \textit{et} \quad \varphi^{(n)}(t) = f\big(t\,,\,\varphi(t)\,,\,\varphi'(t)\,,\,\ldots\,,\,\varphi^{(n-1)}(t)\big)\,.$$

A une telle équation, on associe le système d'ordre 1 :

$$(S_1) \;:\; \begin{cases} y_0' &= \; y_1 \\ & \vdots \\ y_{n-2}' &= \; y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= \; f(t\,,\,y_0\,,\,y_1\,,\,\ldots\,,\,y_{n-1})\,. \end{cases}$$

Si $\varphi : I \to \mathbb{C}$ est solution de $(E_n)$, alors $\big(\varphi\,,\,\varphi'\,,\,\dots\,,\,\varphi^{(n-1)}\big) : I \to \mathbb{C}^n$ est solution de $(S_1)$. Réciproquement, si $(\varphi_0\,,\,\varphi_1\,,\,\dots\,,\,\varphi_{n-1}) : I \to \mathbb{C}^n$ est solution de $(S_1)$, alors la fonction $\varphi_0$ est $n$ fois dérivable, et c'est une solution de $(E_n)$. Grâce à cette correspondance, on peut reformuler le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations d'ordre $n$ :

**Théorème 2** *Soit $\Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$ et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $C^1$. Pour tout point $(t_0, y_0\,,\,y_1\,,\,\dots y_{n-1}) \in \Omega$, il existe une unique solution maximale $\varphi$ de $y^{(n)} = f\big(t\,,\,y\,,\,y'\,,\,\dots\,,\,y^{(n-1)}\big)$ vérifiant : $\varphi^{(k)}(t_0) = y_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Elle est définie sur un intervalle ouvert $I$ contenant $t_0$.*

Le problème de Cauchy pour une équation d'ordre $n$ est donc la donnée **en un même point** des valeurs de la fonction et de ses $n-1$ premières dérivées successives.

# 4 Équations différentielles linéaires

**Définition 6** *On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 l'équation $y' = f(t,y)$, où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ est de la forme : $f(t,y) = a(t)\,(y) + b(t)$ avec $a(t) \in L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ et $b(t) \in \mathbb{C}^n$ pour tout $t \in I$. L'équation $y' = a(t)\,(y)$ est appelée l'équation homogène associée, et la fonction $t \mapsto b(t)$ est le second membre.*

En notant $A(t)$ la matrice de $a(t)$ dans la base canonique, $B(t)$ les coordonnées de $b(t)$ et $Y(t)$ celles de $y(t)$, l'équation s'écrit donc : $Y'(t) = A(t)\,Y(t) + B(t)$ pour $t \in I$. On parle aussi de *système différentiel*.

**Théorème 3** *On considère une équation différentielle linéaire $y' = a(t)\,(y) + b(t)$ sur $I \times \mathbb{C}^n$. Si $I$ est un intervalle ouvert et si les applications $a$ et $b$ sont continues sur $I$, les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites sur $I \times \mathbb{C}^n$ et les solutions maximales sont définies sur $I$ tout entier. Les solutions du système homogène forment un espace vectoriel de dimension n et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

En admettant le fait que les solutions maximales sont définies sur $I$ tout entier, les exercices suivants démontrent ce théorème à partir du théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Exercice 3** On note $S_H$ l'ensemble des solutions de $y' = a(t)\,y$. Montrer que $S_H$ est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, \mathbb{C}^n)$ et que pour tout point $t \in I$, l'application $ev_t : S_H \to \mathbb{C}^n$ définie par $ev_t(\varphi) = \varphi(t)$ est un isomorphisme.

On en déduit que les fonctions $\varphi_1\,,\,\dots\,,\,\varphi_n : I \to \mathbb{C}^n$ forment une base de $S_H$ si et seulement si il existe $t_0 \in I$ tel que les vecteurs $\varphi_1(t_0)\,,\,\varphi_2(t_0)\,,\dots,\,\varphi_n(t_0)$ forment une base de $\mathbb{C}^n$, et que dans ce cas les vecteurs $\varphi_1(t)\,,\,\varphi_2(t)\,,\dots,\,\varphi_n(t)$ forment une base de $\mathbb{C}^n$ pour tout $t \in I$.

**Exercice 4** On note $S$ l'ensemble des solutions de $y' = a(t)\,y + b(t)$. Montrer que $S$ est un sous-espace affine de $C^1(I, \mathbb{C}^n)$ dirigé par $S_H$.

Ce dernier résultat est le *principe de superposition*, et on le retient souvent en disant que la solution générale de l'équation avec second membre est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.

## 4.1 Méthode de variation des constantes

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et soient $a : I \to L(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ et $b : I \to \mathbb{C}^n$ deux applications continues. On considère les équations linéaires sur $I \times \mathbb{C}^n$ :

$$(E) : y' = a(t)\,(y) + b(t) \qquad \text{et} \qquad (H) : y' = a(t)\,(y)\,.$$

Supposons qu'on ait résolu $(H)$, et soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n : I \to \mathbb{C}^n$ une base de $S_H$. Les solutions de $(H)$ sont donc les fonctions de la forme : $c_1 \varphi_1 + \cdots + c_n \varphi_n$ où $c_1, \ldots, c_n$ sont des constantes réelles fixées, et la méthode de variation des constantes consiste à chercher les solutions de $(E)$ sous la forme : $f = c_1 \varphi_1 + \cdots + c_n \varphi_n$ où $c_1, \ldots, c_n$ sont des fonctions dérivables de $I$ dans $\mathbb{C}$. Pour tout $t \in I$, on a donc : $f'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, \varphi_k'(t) + c_k'(t)\, \varphi_k(t)$, d'où :

$$f'(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, a(t)\, (\varphi_k(t)) + c_k'(t)\, \varphi_k(t) = a(t) \Big( \sum_{k=1}^{n} c_k(t)\, \varphi_k(t) \Big) + \sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\, \varphi_k(t)$$

donc : $f'(t) = a(t)\big(f(t)\big) + \sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\, \varphi_k(t)$. On en déduit que $f$ vérifie $(E)$ si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{n} c_k'(t)\, \varphi_k(t) = b(t) \qquad \text{pour tout } t \in I\ ,$$

c'est à dire si les coordonnées de $b(t)$ dans la base $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ sont $\big(c_1'(t), \ldots, c_n'(t)\big)$. En notant $R(t)$ la matrice de $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ dans la base canonique pour tout $t \in I$, on obtient donc le système inversible :

$$(VC) \quad : \quad R(t) \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ \vdots \\ c_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} .$$

En résolvant ce système, on obtient les fonctions $c_1', \ldots, c_n'$, puis les fonctions $c_1, \ldots, c_n$, et finalement $f$. En choisissant des primitives de $c_1', \ldots, c_n'$, on trouve ainsi une solution particulière $f_0$ de $(E)$, mais si l'on considère toutes les primitives possibles (et donc $n$ constantes d'intégration), on obtient la solution générale de $(E)$, dont les composantes sont données par : $F_0(t) + R(t)\, C$ avec $C \in M_{n,1}(\mathbb{C})$, et on retrouve ainsi la solution générale de $(H)$.

## 4.2 Équations linéaires en dimension 1

En dimension $n = 1$ (on parle *d'équations scalaires*), on sait résoudre les équations différentielles linéaires (ce qui n'est plus le cas si $n \geqslant 2$) : l'équation s'écrit $y' = a(t)\, y + b(t)$ sur $I \times \mathbb{C}^n$, où $a$ et $b$ sont deux fonctions réelles continues sur $I$. Si $A$ est une primitive de $a$ sur $I$, l'équation s'écrit : $(y(t)\, e^{-A(t)})' = (y'(t) - a(t)\, y(t))e^{-A(t)} = b(t)\, e^{-A(t)}$ : en choisissant une primitive $B$ de $b\, e^{-A}$, les solutions s'écrivent donc : $(B + c)\, e^{A}$ avec $c \in \mathbb{C}$, et on retrouve le fait que l'ensemble des solutions est une droite affine : on a en fait utilisé la méthode de variation des constantes, qui est particulièrement simple dans ce cas.

**Exercice 5** Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que la solution de $y' = a(t)\, y + b(t)$ vérifiant $y(t_0) = y_0$ est donnée pour tout $t \in I$ par :

$$y(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds} y_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} a(u)\, du} b(s)\, ds\, .$$

## 4.3 Équations linéaires d'ordre $n$

Il s'agit des équations différentielles scalaires de la forme :

$$(EL_n) : \quad y^{(n)} = a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_0(t)\, y + b(t)\, ,$$

où les fonctions $a_0$ , $a_2$ , ... , $a_{n-1}$ et $b$ sont définies sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$. A une telle équation, on associe comme ci-dessus le système $(SL_1)$ : $Y' = A(t)\,Y + B(t)$, avec :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & \dots & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et :} \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Si $b = 0$ (équations homogènes), la correspondance décrite ci-dessus entre les solutions de $(EL_n)$ et les solutions de $(SL_1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, et en général c'est un isomorphisme affine. On déduit le théorème suivant du théorème de Cauchy-Lipschitz :

**Théorème 4** *Si $I$ est un intervalle ouvert et si les fonctions $a_0$ , $a_2$ , ... , $a_{n-1}$ et $b$ sont continues sur $I$, les solutions maximales de $(EL_n)$ sont définies sur $I$ tout entier. Les solutions de l'équation homogène forment un espace vectoriel de dimension $n$ et les solutions de l'équation avec second membre forment un espace affine dirigé par cet espace vectoriel.*

Si on sait résoudre l'équation homogène, on peut comme ci-dessus résoudre l'équation avec second membre en appliquant la méthode de variation des constantes au système $SL_1$.

## 4.4 Équations linéaires d'ordre $n$ à coefficients constants

**Définition 7** *Soit $(H)$ : $y^{(n)} = a_{n-1}\,y^{(n-1)} + ... + a_0\,y$ une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre $n$ à coefficients constants. On appelle équation caractéristique de $(H)$ l'équation $P(\lambda) = 0$ où $P = X^n - a_{n-1}\,X^{n-1} - \dots - a_1\,X - a_0$ , d'inconnue $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

L'équation caractéristique s'obtient donc en cherchant les solutions de $(H)$ sous la forme : $t \mapsto e^{\lambda\, t}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ , et le résultat suivant généralise le cas bien connu où $n = 2$ .

**Théorème 5** *Soient $\lambda_1$ , ... , $\lambda_r \in \mathbb{C}$ les racines de $P$, et $m_k \in \mathbb{N}^*$ la multiplicité de $\lambda_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant r$. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , les fonctions $\Big(t \mapsto t^j\, e^{\lambda_k\, t}\Big)_{1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant m_k-1}$ forment une base de $S_H$ .*
*Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on pose : $\lambda_k = \alpha_k + i\,\omega_k$ si $1 \leqslant k \leqslant r$ avec $\alpha_k$ , $\omega_k \in \mathbb{R}$ et : $\omega_k = 0$ si $1 \leqslant k \leqslant R$ , $\omega_k \neq 0$ si $R + 1 \leqslant k \leqslant r$. Les familles de fonctions : $\Big(t \mapsto t^j\, e^{\alpha_k t}\Big)_{1\leqslant k\leqslant R\,,\,0\leqslant j\leqslant m_k-1}$ , $\Big(t \mapsto t^j\, e^{\alpha_k t}\cos(\omega_k\, t)\Big)_{R+1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant m_k-1}$ et $\Big(t \mapsto t^j\, e^{\alpha_k t}\sin(\omega_k\, t)\Big)_{R+1\leqslant k\leqslant r\,,\,0\leqslant j\leqslant m_k-1}$ forment une base de $S_H$ .*

Pour résoudre $(E)$ : $y^{(n)} = a_{n-1}\,y^{(n-1)} + ... + a_0\,y + b(t)$, on peut appliquer la méthode de variation des constantes, mais il est souvent plus simple d'utiliser le résultat suivant.

**Proposition 1** *Si $b$ est de la forme : $b(t) = Q(t)\,e^{\lambda t}$ pour $t \in \mathbb{R}$ , où $Q$ est un polynôme de degré $q$ , l'équation $(E)$ admet une solution particulière de la forme $t \mapsto R(t)\,e^{\lambda t}$, où $R$ est un polynôme de degré $q$ si $\lambda$ n'est pas racine de $P$, et de degré $q + m_k$ si $\lambda = \lambda_k$ .*

**Exercice 6** Résoudre l'équation différentielle : $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = t$ .

**Exercice 7** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation différentielle : $y^{(n)} - y = e^t + e^{-t}$ .

**Exercice 8** **a)** Montrer que la fonction $y \mapsto \sqrt{|\,y\,|}$ est localement lipschitzienne sur $\mathbb{R}^*$ . Est-elle lipschitzienne au voisinage de 0 ?
**b)** Résoudre l'équation différentielle $(E)$ : $y' = 2\sqrt{|\,y\,|}$ sur $\Omega_+ = \big\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y > 0\big\}$ et sur $\Omega_- = \big\{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / \, y < 0\big\}$ .
**c)** Soient $a \leqslant b$ deux réels. Montrer que la fonction définie par : $y(t) = -(t - a)^2$ si $t < a$ , $y(t) = 0$ si $a \leqslant t \leqslant b$ et $y(t) = (t - b)^2$ si $t > b$ est solution de $(E)$ .
**d)** Résoudre $(E)$ sur $\mathbb{R}^2$ . Combien a-t-elle de solutions maximales vérifiant $y(0) = 0$ ?