Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2015-2016

Interrogation du 10 décembre 2015

Durée : 1 heure 15

Question de cours

Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Exercice 1

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$. Montrer que la suite de terme général

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)\mathrm{d}x$$

tend vers 0 (quand n tend vers l'infini).

Exercice 2

Dans tout l'exercice, $(u_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite de réels. On dit que le produit infini $\prod u_n$ *converge* si la suite $(\prod_{n=1}^N u_n)_{N\in\mathbb{N}}$ admet une limite *finie non nulle*. On notera

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} u_n \in]0, \infty[.$$

1. On suppose que le produit infini $\prod u_n$ converge. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 1.

2. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes *strictement positifs*.

   (a) Montrer que le produit infini $\prod u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \ln u_n$ converge.

   (b) On suppose que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 1. Donner un équivalent de $\ln(u_n)$ quand n tend vers l'infini.

   (c) On suppose $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la convergence de $\prod u_n$ est équivalente à celle de $\sum(u_n - 1)$.

   (d) De même, montrer que si $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la convergence de $\prod u_n$ est équivalente à la convergence de $\sum(u_n - 1)$.

3. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, \pi/2[$, le produit infini $\prod \cos(x/n)$ est convergent.

   (b) Montrer, en utilisant un produit infini, que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.