Interrogation du 10 décembre 2015 : corrigé

Question de cours

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, dont on note l la limite. Par définition, il exite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq n_0$, on ait $|u_n - l| \leq 1$. Par conséquent, pour $n \geq n_0$, on a $|u_n| \leq |l| + 1$. De plus, pour tout $0 \leq n \leq n_0$, on a $|u_n| \leq \max_{k=0}^{n_0} |u_k|$.

Par conséquent, on conclut que pour tout entier n, l'inégalité $|u_n| \leq \max(|l| + 1, \max_{k=0}^{n_0} |u_k|)$ est vérifiée. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

Exercice 1

Par intégration par parties on trouve

$$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx = f(b)\frac{\sin(nb)}{n} - f(a)\frac{\sin(na)}{n} - \int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx.$$

Or $\left|f(a)\frac{\sin(na)}{n}\right| \leq \frac{|f(a)|}{n} \to 0$, de sorte que $f(a)\frac{\sin(na)}{n}$ tend vers 0. De même $f(b)\frac{\sin(nb)}{n}$ tend vers 0. Enfin,

$$\int_a^b f'(x)\frac{\sin(nx)}{n}dx \leq \frac{|b-a|}{n} \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)| \to 0.$$

$\int_a^b f(x)\cos(nx)dx$ est la somme de trois termes tendant vers 0, donc tend lui aussi vers 0.

Exercice 2

1. On a

$$u_n = \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{n} u_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} u_k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} u_k}{\displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} u_k} = 1.$$

2. (a) Si $\prod_{n=1}^{N} u_n$ converge (en $N \to \infty$) vers une limite $l \in]0,\infty[$, alors par continuité de la fonction ln en l, la suite $\ln(\prod_{n=1}^{N} u_n) = \sum_{n=1}^{N} \ln u_n$ converge (en $N \to \infty$) vers $\ln l$. On a donc bien convergence de la série $\sum \ln u_n$.
   Inversement, si $\sum_{n=1}^{N} \ln u_n$ converge vers $l' \in \mathbb{R}$, alors par continuité de l'exponentielle, la suite $\exp(\sum_{n=1}^{N} \ln u_n) = \prod_{n=1}^{N} u_n$ converge vers $e^{l'} > 0$ quand N tend vers ∞. Le produit est bien convergent.

(b) On a le développement limité suivant en $x \to 0$: $\ln(1+x) = x + o(x)$. Comme $u_n - 1$ tend vers 0, on a donc

$$\ln u_n = \ln(1 + (u_n - 1)) = (u_n - 1) + o(u_n - 1).$$

Autrement dit, $\ln u_n$ est équivalent à $u_n - 1$.

(c) Si $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux sutes à termes positifs qui sont, d'après la question (2b), équivalentes. Par conséquent, la convergence de la série $\sum \ln u_n$ est équivalente à celle de $\sum(u_n - 1)$. On a montré en (2a) que la convergence de $\sum \ln u_n$ équivaut à celle de $\prod u_n$, d'où le résultat.

(d) Si $u_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors les suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux sutes à termes négatifs qui sont, d'après la question (2b), équivalentes. Comme ces deux suites on un signe constant, on a comme à la question précédente, équivalence entre convergence de $\sum \ln u_n$ et convergence de $\sum(u_n - 1)$. On conclut comme en (2c).

3. (a) Pour $x \in [0, \pi/2]$ fixé, on a $0 < \cos(x/n) \leq 1$. On peut donc appliquer la question (2d) et se ramener à la convergence de $\sum(\cos(x/n) - 1)$. Or, on a le développement asymptotique (en $n \to \infty$)

$$\cos(x/n) - 1 = -1 + \left(1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Par conséquent, $\cos(x/n) - 1$ est négatif et équivalent à $-\frac{x^2}{2n^2}$ (qui est négatif). Comme la série $\sum \frac{-x^2}{2n^2}$ converge, c'est aussi le cas de la série $\sum(\cos(n/x) - 1)$, d'où le résultat.

(b) Le produit $\prod \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ diverge. En effet, on a

$$\prod_{n=1}^{N} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \prod_{n=1}^{N} \frac{n+1}{n} = \frac{N+1}{1} \to \infty.$$

Or $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ pour tout n, la question 2c implique donc que la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge également.