Universités Paris 6 et Paris 7 — Analyse (UE 3)
M1 MEEF — 2015-2016

Interrogation du 18 février 2016

Durée : 1h15. Barème indicatif : 4 + 4 + 12

Question de cours

Soient $a < b$ deux réels, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n :]\,a\,,\,b\,[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $F :]\,a\,,\,b\,[\to \mathbb{R}$.

a) Quelle(s) hypothèse(s) suffit-il de rajouter pour pouvoir affirmer que F est continue sur $]\,a\,,\,b\,[$ et que : $\displaystyle\int_x^y F(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_x^y f_n(t)\,dt$ pour tous $x\,,\,y \in]\,a\,,\,b\,[$?

b) Quelle(s) hypothèse(s) suffit-il de rajouter pour pouvoir affirmer que F est de classe C^1 et que : $F'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$ pour tout $x \in]\,a\,,\,b\,[$?

Exercice 1

Étudier la convergence de l'intégrale impropre : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^4}\,dt$.

Exercice 2

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge. On note L sa somme et pour tout entier naturel N et tout réel x on pose :

$$s_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \quad , \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n \quad \text{et} \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n}{n!}\,x^n \quad .$$

a) Montrer que les fonctions f et S sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que $|\,a_n\,| \leqslant \varepsilon$ pour tout entier $n > N$. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$ on a :

$$|\,f(x)\,| \leqslant \Big|\sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n!}\,x^n\Big| + \varepsilon\,e^x \quad .$$

En déduire que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,e^{-x} = 0$.

c) Déterminer : $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x)\,e^{-x}$.

Indication : *on pourra appliquer le résultat du* **b)** *à la suite* $(a_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $a_n' = s_n - L$.

d) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f'(x) = S'(x) - S(x)$. En déduire que :

$$\int_0^x f(t)\,e^{-t}\,dt = \big(\,S(x) - f(x)\,\big)\,e^{-x} \quad .$$

e) Montrer que :

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,e^{-x}\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad .$$

Question subsidiaire (hors barème). Quelle(s) hypothèse(s) suffit-il de rajouter pour qu'un théorème du cours permette d'obtenir directement ce résultat ? *(On pourra calculer par récurrence* $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n\,e^{-x}\,dx$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *.)*