Corrigé de l'interrogation du 18 février 2016

Question de cours

a) Il suffit de supposer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur tout segment $J \subset]\,a\,,\,b\,[$, ce qui est vrai si elle converge uniformément vers F sur $]\,a\,,\,b\,[$. Le théorème du cours qu'on utilise est (chapitre 7) :

Théorème 1 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$. Alors la fonction f est continue sur I et pour tous $a\,,\,b \in I$ on a :*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt \quad .$$

Remarque 1 La conclusion de ce théorème reste vraie si la convergence est uniforme sur tout segment $J \subset I$.

b) Il suffit de supposer que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment $J \subset]\,a\,,\,b\,[$, ce qui est vrai si elle converge uniformément sur $]\,a\,,\,b\,[$. Le théorème du cours qu'on utilise est (chapitre 7) :

Théorème 2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I telle que :*
- il existe un point $a \in I$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente,
- la suite des dérivées $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction $g : I \to \mathbb{C}$.
Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ de classe C^1 et on a : $f' = g$. De plus, la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f est uniforme sur tout segment $J \subset I$.

Remarque 2 Ici aussi, il suffit que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g uniformément sur tout segment $J \subset I$.

Exercice 1

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t^4}$ est continue sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ donc il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale en 0 et en $+\infty$. Mais on a : $f(t) \sim \ln(t)$ quand t tend vers 0 et la fonction ln est intégrable sur $]\,0\,,\,1\,]$ donc f aussi, et par croissances comparées on obtient : $f(t) = o\Big(\dfrac{1}{t^2}\Big)$ quand t tend vers $+\infty$ donc f est intégrable sur $[\,1\,,\,+\infty\,[$, donc elle est finalement intégrable sur $]\,0\,,\,+\infty\,[$ et l'intégrale converge (absolument).

Exercice 2

a) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge puisque $\sum a_n$ converge. Ces deux suites sont donc bornées, donc on a : $\dfrac{a_n}{n!} = O\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$ et $\dfrac{s_n}{n!} = O\Big(\dfrac{1}{n!}\Big)$, donc les rayons de convergence de $\sum \dfrac{a_n}{n!}\,x^n$ et de $\sum \dfrac{s_n}{n!}\,x^n$ sont supérieurs ou égaux à celui de la série exponentielle : il sont donc infinis, donc f et S sont définies et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

b) La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc il existe un entier naturel N tel que $|\,u_n\,| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Pour tout réel $x \geqslant 0$, on obtient alors :

$$|\,f(x)\,| \leqslant \Big|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!}\,x^n\Big| + \sum_{n=N}^{+\infty} \Big|\frac{a_n}{n!}\Big|\,x^n \leqslant \Big|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{a_n}{n!}\,x^n\Big| + \sum_{n=0}^{+\infty} \Big|\frac{\varepsilon}{n!}\Big|\,x^n = |\,P_N(x)\,| + \varepsilon\,e^x$$

où P_N est un polynôme. On en déduit que : $|\,f(x)\,e^{-x}\,| \leqslant \varepsilon + |\,P_N(x)\,e^{-x}\,|$, et par croissances comparées on a :

$$\lim_{x\to+\infty} P_N(x)\,e^{-x} = 0$$

donc il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que : $|\,P_N(x)\,e^{-x}\,| \leqslant \varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$. On en conclut que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $A \geqslant 0$ tel que : $|\,f(x)\,e^{-x}\,| \leqslant 2\,\varepsilon$ pour tout $x \geqslant A$, c'est à dire que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\,e^{-x} = 0 \quad .$$

c) En posant $a'_n = s_n - L$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et on obtient pour tout réel x :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L + a'_n}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L}{n!}\,x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a'_n}{n!}\,x^n = L\,e^x + g(x)$$

où les rayons de convergence sont infinis, donc :

$$\lim_{x\to+\infty} S(x)\,e^{-x} = L + \lim_{x\to+\infty} g(x)\,e^{-x} = L = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

en remplaçant f par g dans le raisonnement précédent.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{n+1} - s_n}{n!}\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_{n+1}}{n!}\,x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s_n}{n!}\,x^n = S'(x) - S(x)$$

puisque toutes les séries convergent absolument. En intégrant par parties, on en déduit que :

$$\int_0^x f(t)\,e^{-t}\,dt = \Big[-f(t)\,e^{-t}\Big]_0^x + \int_0^x f'(t)\,e^{-t}\,dt = a_0 - f(x)\,e^{-x} + \int_0^x \big(S'(t) - S(t)\big)\,e^{-t}\,dt$$

et on a de même puisque $s_0 = a_0$:

$$\int_0^x S(t)\,e^{-t}\,dt = \Big[-S(t)\,e^{-t}\Big]_0^x + \int_0^x S'(t)\,e^{-t}\,dt = a_0 - S(x)\,e^{-x} + \int_0^x S'(t)\,e^{-t}\,dt$$

donc il vient finalement :

$$\int_0^x f(t)\,e^{-t}\,dt = \big(S(x) - f(x)\big)\,e^{-x} = S(x)\,e^{-x} - f(x)\,e^{-x} \quad .$$

e) En faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat grâce à **c)**.

Question subsidiaire. Pour tout réel x on a :

$$f(x)\,e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}\,x^n\,e^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

et la fonction somme est continue. Mais pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $x \mapsto x^n\,e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ par croissances comparées, et on obtient :

$$I_{n+1} = \int_0^{+\infty} x^{n+1}\,e^{-x}\,dx = \Big[-x^{n+1}\,e^{-x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (n+1)\,x^n\,e^{-x}\,dx = (n+1)\,I_n$$

en intégrant par parties et on a $I_0 = 1$, d'où $I_n = n!$. Chaque fonction f_n est donc continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = a_n \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} |\,f_n(x)\,|\;dx = |\,a_n\,| \quad .$$

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge **absolument**, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^{+\infty} |\,f_n(x)\,|\;dx$ est donc convergente, et le théorème d'intégration terme à terme permet d'en déduire le résultat du **e)**.