Université Pierre et Marie Curie | Probabilités (UE 1)
M1 MEEF | 2015-2016

Exercices

Exercice 1
Soient X et Y deux variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$ indépendantes.

1. Montrer que la variable aléatoire $\min(X,Y)$ admet une densité que l'on explicitera. Même question pour $\max(X,Y)$.
2. Combien vaut $\mathbb{E}|X-Y|$?

Exercice 2
Soient X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ et Y une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. On suppose X et Y indépendantes. Quelle est la loi de Y/X ?

Exercice 3
Soient X et Y deux variables aléatoires de loi normale centrée réduite indépendantes. Quelle est la loi de Y/X ? Les variables X et Y/X sont-elles indépendantes ?

Exercice 4
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois géométriques de paramètre $\lambda > 0$.

1. Quelle est la loi de $\min(X,Y)$?
2. Quelle sont les lois de $X+Y$ et de $\frac{X}{X+Y}$? Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

Exercice 5
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = \mathbb{P}(X=n)$ et $G(t) = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n t^n$.

1. Montrer que $G(t)$ est bien définie pour $0 \leq t \leq 1$, et que la fonction obtenue est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $0 \leq t < 1$.
2. Dans cette question, on suppose que X est intégrable.
   (a) Montrer que la fonction $h \mapsto \frac{G(1)-G(1-h)}{h}$ est décroissante pour $0 < h < 1$.
   (b) Montrer l'inégalité, pour $0 < t < 1$
   $$0 \leq \frac{1-(1-h)^n}{h} \leq n.$$
   (c) En déduire que G est dérivable en 1, avec $G'(1) = \mathbb{E}[X]$.
3. Dans cette question, on suppose X de carré intégrable. Montrer que G' est dérivable en 1, et exprimer la variance de X en fonction de $G'(1)$ et de $G''(1)$.

Exercice 6
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\{1,2,3\}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les 6 probabilités $\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=1)$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=1|X_n=2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=2)$, $\mathbb{P}(X_{n+1}=2|X_n=3)$ et $\mathbb{P}(X_{n+1}=3|X_n=3)$ soient égales à $1/2$. On admettra l'existence d'une telle suite de variables.

1. Montrer que si $\mu_n = (\mathbb{P}(X_n=1), \mathbb{P}(X_n=2), \mathbb{P}(X_n=3))$, alors on a $\mu_{n+1} = \mu_n P$ pour une certaine matrice P.
2. Calculer les valeurs propres de P.
3. En déduire le comportement asymptotique de μ_n.