

Interrogation du 2 novembre 2015

Durée : 1 heure 15

Exercice 1

1. Donner la définition de l'indépendance de n événements. Donner la définition de l'indépendance deux à deux de n événements. Laquelle de ces deux notions implique l'autre ?
2. On jette un dé bleu et un dé rouge, et on considère les événements suivants :
 - “le résultat du dé bleu est pair”, noté B ;
 - “le résultat du dé rouge est pair”, noté R ;
 - “la somme des deux dés est paire”, noté S ;Les événements B , R et S sont-ils indépendants ? indépendants deux à deux ?

Exercice 2

On dispose de trois urnes \mathcal{U}_1 , \mathcal{U}_2 et \mathcal{U}_3 . On sait que :

- L'urne \mathcal{U}_1 contient 1 boule rouge et 9 boules noires ;
 - L'urne \mathcal{U}_2 contient 18 boules rouges et 2 boules noires ;
 - L'urne \mathcal{U}_3 contient 3 boules rouges et 3 boules noires.
1. On choisit une urne au hasard parmi les trois, puis on tire une boule dans cette urne.
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
 - (b) On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule ait été tirée dans l'urne \mathcal{U}_1 ? dans l'urne \mathcal{U}_2 ? dans l'urne \mathcal{U}_3 ?
 2. On regroupe toutes les boules dans une même urne, de laquelle on tire une boule.
 - (a) Quelle est la probabilité de tirer une boule rouge ?
 - (b) On a tiré une boule rouge. Quelle est la probabilité que cette boule vienne initialement de l'urne \mathcal{U}_1 ? de l'urne \mathcal{U}_2 ? de l'urne \mathcal{U}_3 ?

Exercice 3

On dispose d'une urne contenant N boules blanches. On tire 10 boules (on suppose $N \geq 10$), que l'on peint en bleu avant de les remettre dans l'urne. On tire ensuite de nouveau 10 boules dans l'urne.

1. Pour $k \in \{0, \dots, 10\}$, quelle est la probabilité $p_k(N)$ qu'exactement k des boules tirées la deuxième fois soient peintes en bleu ?
2. Montrer l'égalité $\frac{p_k(N)}{p_k(N-1)} = \frac{(N-10)^2}{N(N+k-20)}$.
3. En déduire la valeur de N qui maximise $p_k(N)$. Interprétation ?