Corrigé de l'interrogation du 2 novembre 2015

Exercice 1

1. Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits indépendants si, pour tous indices $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$, l'égalité $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_{i_k})$ est vérifiée.

   Les évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits indépendants deux à deux si, pour tous indices $1 \leq i_1 < i_2 \leq n$, l'égalité $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \times \mathbb{P}(A_{i_2})$ est vérifiée.

   En particulier, des évènements indépendants sont deux à deux indépendants.

2. On peut représenter cette expérience par l'ensemble $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^2$ (qui comporte 36 éléments) muni de la probabilité uniforme. Les évènements B, R et S s'écrivent alors

$$B = \{2,4,6\} \times \{1,\ldots,6\}, \quad R = \{1,\ldots,6\} \times \{2,4,6\}, \text{ et } S = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,4,6\}^2.$$

   Chacun des ensembles B, R et S comporte 18 éléments. Leurs intersections sont données par

$$B \cap R \cap S = B \cap R = B \cap S = R \cap S = \{2,4,6\}^2.$$

   Cet ensemble comporte 9 éléments.

   Les événements B, R et S ne sont pas indépendants car on a $\mathbb{P}(B \cap R \cap S) = 9/36 = 1/4$, alors que $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S) = 18/36 \times 18/36 \times 18/36 = 1/2 \times 1/2 \times 1/2 = 1/8$. En revanche, ils sont bien indépendants deux à deux car : $\mathbb{P}(B \cap R) = 1/4 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(R)$, $\mathbb{P}(B \cap S) = 1/4 = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(S)$ et $\mathbb{P}(R \cap S) = 1/4 = \mathbb{P}(R)\mathbb{P}(S)$.

Exercice 2

1. Pour cette première expérience, on dispose des évènements suivant : pour $i = 1, 2, 3$, on note par U_i l'évènement *"On a choisit l'urne $\mathcal{U}_i$"*, et on note R l'évènement *"La boule tirée est rouge"*. Les conditions de l'énoncé nous donnent

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_3) = 1/3,$$

   ainsi que

$$\mathbb{P}_{U_1}(R) = 1/10, \quad \mathbb{P}_{U_2}(R) = 18/20 = 9/10 \text{ et } \mathbb{P}_{U_3}(R) = 3/6 = 1/2.$$

   (a) La formule des probabilités totales nous donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R) &= \mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}_{U_1}(R) + \mathbb{P}(U_2)\mathbb{P}_{U_2}(R) + \mathbb{P}(U_3)\mathbb{P}_{U_3}(R) \\ &= 1/3 \times 1/10 + 1/3 \times 9/10 + 1/3 \times 1/2 \\ &= 1/2.\end{aligned}$$

   (b) On utilise ici la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}_R(U_1) = \mathbb{P}_{U_1}(R)\frac{\mathbb{P}(U_1)}{\mathbb{P}(R)} = 1/10 \times \frac{1/3}{1/2} = 1/15.$$

   De même, on trouve $\mathbb{P}_R(U_2) = 3/5$ et $\mathbb{P}_R(U_3) = 1/3$. Remarque : la somme $\mathbb{P}_R(U_1) + \mathbb{P}_R(U_2) + \mathbb{P}_R(U_3)$ vaut bien 1.

2. Dans cette expérience, on notera $\tilde{R}$ l'évènement *"La boule tirée est rouge"* et $\tilde{U}_i$ l'évènement *"La boule tirée provient de l'urne $\mathcal{U}_i$"*.

(a) Cette fois-ci, on effectue un seul tirage, par conséquent, la probabilité de tirer une boule rouge est le rapport du nombre de boules rouge sur le nombre total de boules soit $(1+18+3)/(10+20+6) = 22/36 = 11/18$.

(b) La définition de la probabilité conditionnelle donne

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_1) = \frac{\mathbb{P}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{R})}{\mathbb{P}(\tilde{R})}.$$

Les conditions de l'énoncé donnent

$$\mathbb{P}(\tilde{U}_1 \cap \tilde{R}) = \frac{\text{nombre de boules rouge dans } \mathcal{U}_1}{\text{nombre total de boules}} = 1/36,$$

d'où

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_1) = 1/36 \times 18/11 = 1/22.$$

De même

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_2) = 18/36 \times 18/11 = 18/22$$

et

$$\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_3) = 3/36 \times 18/11 = 3/22.$$

On aurait aussi pu remarquer que $\mathbb{P}_{\tilde{R}}(\tilde{U}_i)$ est donné par

$$\frac{\text{nombres de boules rouges dans } \mathcal{U}_i}{\text{nombre de boules rouges}}.$$

Exercice 3

Après le premier tirage, l'urne contient $N-10$ boules blanches et 10 boules peintes en bleu.

1. Il y a au total $\binom{N}{10}$ manières de tirer 10 boules dans une urne en contenant N. Par ailleurs, il y a $\binom{10}{k}$ manières de tirer k boules parmi les 10 boules peintes, et il y a $\binom{N-10}{10-k}$ manières de tirer $10-k$ boules parmi les $N-10$ boules blanches. Le nombre de tirages contenant k boules peintes en bleu est donc de $\binom{10}{k}\binom{N-10}{10-k}$. La probabilité $p_k(N)$ vaut donc, pour $k \in \{0, ..., 10\}$:

$$p_k(N) = \frac{\binom{10}{k}\binom{N-10}{10-k}}{\binom{N}{10}} = \frac{\frac{10!}{k!(10-k)!}\frac{(N-10)!}{(N+k-20)!(10-k)!}}{\frac{N!}{(N-10)!10!}} = \frac{10!^2(N-10)!^2}{k!N!(N+k-20)!(10-k)!^2}.$$

2. On peut écrire $p_k(N)$ sous la forme

$$p_k(N) = C_k \frac{(N-10)!^2}{N!(N+k-20)!},$$

où C_k dépend de k mais pas de N. De plus, pour tout entier q, on a $(N+q)!/(N-1+q)! = N+q$. On en déduit l'égalité

$$\frac{p_k(N)}{p_k(N-1)} = \frac{(N-10)^2}{N(N+k-20)}.$$

3. On a donc les équivalences

$$\begin{aligned}\frac{p_k(N)}{p_k(N-1)} > 1 &\Leftrightarrow (N-10)^2 > N(N+k-20)\\ &\Leftrightarrow N^2 - 20N + 100 > N^2 + (k-20)N\\ &\Leftrightarrow 100 > kN\\ &\Leftrightarrow N < \frac{100}{k}.\end{aligned}$$

Autrement dit, la suite $(p_k(N))_{N\geq 1}$ est croissante sur $1 \leq N < \frac{100}{k}$ et décroissante sur $\frac{100}{k} \leq N$. Par conséquent, la valeur de N qui maximise $p_k(N)$ à k fixé est la partie entière de $100/k$ (si k divise 100, les deux valeurs $N = 100/k$ et $N = 100/k - 1$ maximisent $p_k(N)$).

On remarque que la valeur $N = 100/k$ correspond à la solution de

$$\frac{N}{10} = \frac{\text{nombre de boules}}{\text{nombre de boules bleues}} = \frac{\text{nombre de boules tirées}}{\text{nombre de boules bleues tirées}} = \frac{10}{k}.$$