Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Probabilités (UE 1)
2015-2016

Interrogation du 1$^{\text{er}}$ février 2016

Durée : 1 heure 15

Question de cours

1. Donner la définition de la moyenne et de la variance d'une variable aléatoire discrète.

   On rappellera les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces deux quantités soient bien définies.

2. Donner la définition de l'indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Exercice 1

Dans cet exercice, on considère un réel $0 < q < 1$.

1. Montrer que la série $\sum (n+1)q^n$ est convergente.
2. Montrer qu'il existe un réel c, dont on précisera la valeur, tel que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$p_n = c(n+1)q^n$$

   soit une loi de probabilité. On pourra utiliser la relation $q^n = \frac{q^n}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q}$, ou bien encore utiliser la série entière $\sum (n+1)z^n$.

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre q : pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}(U = n) = \mathbb{P}(V = n) = (1-q)q^n$.

4. Quelle est la loi de $U + V$?
5. En déduire l'espérance d'une variable aléatoire de loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $X = \max(U, V)$.

1. Rappeler la fonction de répartition de U et V.
2. Calculer la fonction de répartition de X.
3. Montrer que la variable X admet une densité que l'on explicitera.