Interrogation du 1$^{\text{er}}$ février 2016 : correction

Question de cours

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. Si la série $\sum |x_i|\mathbb{P}(X = x_i)$ converge (on dit alors que X est intégrable), alors on définit l'espérance de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

   Si X^2 est intégrable, on définit la variance de X par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right).$$

2. Deux variables aléatoires X et Y à valeurs respectivement dans les ensembles $\{x_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $\{y_j, j \in \mathbb{N}\}$ sont indépendantes si pour tout i et j, on a

$$\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j).$$

Exercice 1

1. Les $(n+1)q^n$ sont positifs. On peut alors appliquer le critère de d'Alembert (par exemple) : on a $\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \frac{n+1}{n} q \to q < 1$, ce qui montre que la série est convergente.

2. Pour tout n, si $c > 0$, on a $p_n \geq 0$, et de plus (par la question précédente) $\sum_{n=0}^{\infty} p_n < \infty$. Par conséquent, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une probabilité si et seulement si $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, c'est-à-dire si et seulement si

$$c = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n\right)^{-1}.$$

   Pour calculer cette valeur, on peut remarquer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ a un rayon de convergence de 1, et que sa somme est la fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$. On peut dériver termes à termes une série entière sur son disque de convergence, de sorte que (pour $|z| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

   On a donc $c = (1-q)^2$.

   La valeur de c peut aussi être obtenue par le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n = \frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n - \frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^{n+1} &= \frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n - \frac{1}{1-q}\sum_{n=1}^{\infty} nq^n \\ &= \frac{1}{1-q}\sum_{n=0}^{\infty} q^n \\ &= \frac{1}{(1-q)^2}.\end{aligned}$$

3. La variable aléatoire $U+V$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$ puisque U et V le sont. Pour n entier, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U+V=n) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(U=k, V=n-k) = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(U=k)\mathbb{P}(V=n-k) &= \sum_{k=0}^{n} (1-q)q^k(1-q)q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (1-q)^2 q^n \\ &= (1-q)^2(n+1)q^n.\end{aligned}$$

La deuxième égalité découle de l'indépendance de U et V. On reconnait donc que $U+V$ suit la loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. L'espérance d'une variable de loi $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(U+V) = \mathbb{E}U + \mathbb{E}V = 2\mathbb{E}U = 2\sum_{n=0}^{\infty}(1-q)nq^n &= 2(1-q)\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n - \sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \\ &= 2(1-q)\left(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q}\right) \\ &= \frac{2q}{(1-q)}.\end{aligned}$$

Exercice 2

1. La fonction de répartition de U est

$$F_U(t) = \mathbb{P}(U \le t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0, \\ t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}$$

2. La fonction de répartition de X est donnée par

$$\begin{aligned}F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \mathbb{P}(\max(U,V) \le t) &= \mathbb{P}(U \le t, V \le t) \\ &= \mathbb{P}(U \le t)\mathbb{P}(V \le t) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0, \\ t^2 & \text{si } 0 < t < 1, \\ 1 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}\end{aligned}$$

La troisième égalité découle de l'indépendance de U et de V.

3. La fonction de répartition de X est dérivable par morceaux et continue. Par conséquent, X admet une densité, donnée par :

$$f_X(t) = F'_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0, \\ 2t & \text{si } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{si } t \ge 1. \end{cases}$$