Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Probabilités (UE 1)
2015-2016

Interrogation du 14 mars 2016

Durée : 1 heure 30

Exercice 1

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la loi de $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ admet une densité que l'on explicitera. Montrer que la densité ρ_n de nM_n converge simplement pour $n \to \infty$ vers une densité de probabilité ρ que l'on identifiera.

Exercice 2

Un couple (X, Y) de variables aléatoires admet pour densité la fonction f définie par $f(x, y) = c(x - y)$ si $0 \leq y \leq x \leq 1$, et $f(x, y) = 0$ sinon. Que vaut c ? Quelles sont les lois des variables X et Y ?

Exercice 3

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ, dont on rappelle que la densité est $\lambda \exp(-\lambda x)$ sur $x \in]0, \infty[$.

1. Donner (avec justifications) la moyenne et la variance commune des X_n, en fonction de λ.
2. Vérifier que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait les hypothèses du théorème limite central. Appliquer le théorème dans ce cadre, et en déduire un intervalle de confiance (asymptotique) à 95% sur λ, en fonction de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 4

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Quelle est la densité du couple (X, Y) ?
2. Montrer que le couple $(\frac{X}{X+Y}, X + Y)$ admet une densité que l'on explicitera.
3. Les variables $\frac{X}{X+Y}$ et $X + Y$ sont-elles indépendantes ? Quelles sont leurs densités respectives ?