# Corrigé de l'interrogation du 14 mars 2016

## Exercice 1

La fonction de répartition de $M_n = \min(X_1, \ldots, X_n)$ est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n) \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\min(X_1,\ldots,X_n) > t) &= 1 - \mathbb{P}(\forall 1 \leq i \leq n, X_i > t) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > t) \text{ (indépendance)} \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_i > t)^n \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 - (1-t)^n & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}\end{aligned}$$

La fonction de répartition de $M_n$ est donc continue et dérivable par morceaux. Par conséquent, $M_n$ admet une densité donnée par la dérivée de la fonction de répartition, soit

$$\rho_{M_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin ]0,1[, \\ n(1-t)^{n-1} & \text{si } 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Puisque

$$\mathbb{E}f(nM_n) = \int_{\mathbb{R}} f(nt)\rho_{M_n}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(y)\rho_{M_n}(y/n)dy/n,$$

la densité de $nM_n$ est donnée par

$$\rho_n(t) = \frac{1}{n}\rho_{M_n}(t/n) = (1-t/n)^{n-1} \to_n \exp(-t).$$

La densité de $nM_n$ converge donc vers la densité de la loi exponentielle de paramètre 1.

## Exercice 2

On doit avoir $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy = 1$, d'où

$$c = \left(\int_0^1 \int_0^x (x-y)dydx\right)^{-1} = \left(\int_0^1 \frac{x^2}{2}dx\right)^{-1} = 6.$$

La loi de $X$ est la loi dont la densité est donnée par

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy = \begin{cases} 6\int_0^x (x-y)dy = 3x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Celle de $Y$ est donnée par

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)dx = \begin{cases} 6\int_y^1 (x-y)dx = 3(1-y)^2 & \text{si } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

## Exercice 3

1. L'espérance et la variance des $X_n$ sont bien définies puisque les $X_n$ sont de carré intégrable. En effet, $\mathbb{E}(X_n^2) = \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx$, et la fonction $x^2 e^{-\lambda x}$ est intégrable sur $]0, \infty[$ (elle est continue, bornée en 0, et à décroissance exponentielle en $\infty$). Les moments s'obtiennent par des intégrations par parties :

$$\mathbb{E}X_n = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \lambda x e^{-\lambda x} dx = \lim_{M\to\infty} \left( [-xe^{-\lambda x}]_0^M + \int_0^M e^{-\lambda x} dx \right) = 0 + \lim_{M\to\infty} \left[ \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^M = \frac{1}{\lambda}.$$

et

$$\mathbb{E}(X_n^2) = \lim_{M\to\infty} \int_0^M \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx = \lim_{M\to\infty} \left( \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^M + \int_0^M 2xe^{-\lambda x} dx \right) = \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.$$

D'où $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - (\mathbb{E}X_n)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

2. La suite $(X_n)$ vérifie les hypothèses du théorème limite central si les $X_n$ sont indépendantes, ont même loi, et sont de carré intégrable. C'est bien le cas ici. Le théorème limite central s'énonce ici, pour $a \leq b$,

$$\mathbb{P}\left( a \leq \sqrt{\frac{N}{1/\lambda^2}} \left( \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N X_n - \frac{1}{\lambda} \right) \leq b \right) \to_{N\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Avec $b = -a = 1.96$, on obtient

$$\mathbb{P}\left( -1.96 \leq \sqrt{N} \left( \frac{\lambda}{N} \sum_{n=1}^N X_n - 1 \right) \leq 1.96 \right) = \mathbb{P}\left( \lambda \in \widehat{I}_N \right) \to_{n\to\infty} 0.95,$$

où

$$\widehat{I}_N = \left[ \frac{N}{\sum_{n=1}^N X_n} \left( 1 - \frac{1.96}{\sqrt{N}} \right), \frac{N}{\sum_{n=1}^N X_n} \left( 1 + \frac{1.96}{\sqrt{N}} \right) \right]$$

est donc un intervalle de confiance (asymptotique) à 0.95 pour $\lambda$.

## Exercice 4

1. Les deux variables $X$ et $Y$ sont indépendantes, donc la densité du couple $(X, Y)$ est le produit (tensoriel) des densités de $X$ et $Y$, soit

$$\rho_{(X,Y)}(x, y) = \rho_X(x)\rho_Y(y) = e^{-x-y}.$$

2. On a, pour $f$ une fonction bornée, en posant $t = x + y$, puis $s = x/t$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f\left( \frac{X}{X+Y}, X+Y \right) = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty f\left( \frac{x}{x+y}, x+y \right) e^{-(x+y)} dy \right) dx &= \int_0^\infty \left( \int_x^\infty f\left( \frac{x}{t}, t \right) e^{-t} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^t f\left( \frac{x}{t}, t \right) e^{-t} dx \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^1 f(s, t) e^{-t} t ds \right) dt.\end{aligned}$$

La densité du couple $(\frac{X}{X+Y}, X+Y)$ en fonction de $(s, t)$ est donc $\mathbf{1}_{0\leq s\leq 1} te^{-t} \mathbf{1}_{t\geq 0}$.

3. La densité du couple $(\frac{X}{X+Y}, X+Y)$ est le produit tensoriel des densités $\mathbf{1}_{0\leq s\leq 1}$ et $te^{-t}\mathbf{1}_{t\geq 0}$. Les deux variables sont donc indépendantes, $\frac{X}{X+Y}$ ayant pour densité $\mathbf{1}_{0\leq s\leq 1}$ (loi uniforme sur $[0, 1]$), et $X + Y$ ayant pour densité $te^{-t}$ (loi $\Gamma$).