TP 1 : compilation, syntaxe, boucles

Exercice 1 :
Écrire un programme qui affiche "Bonjour" à l'écran.

Exercice 2 :
Écrire un programme qui demande à l'utilisateur d'entrer un nombre entier positif, puis qui calcule la partie entière de sa racine carée.

Exercice 3 :
Écrire une fonction qui demande un entier positif n à l'utilisateur et qui écrit les n premiers nombres de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, définie par $F_0 = F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 4 :
Afficher à l'écran les nombres premiers inférieurs à 1000.

Exercice 5 :
À l'aide de la représentation $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, écrire une fonction calculant la fonction exponentielle. Tracer le graphe correspondant à l'aide du programme `gnuplot`. Comparer les valeurs renvoyées par cette fonction aux valeurs renvoyées par la fonction `exp` de la bibliothèque `cmath`.

Exercice 6 :
La méthode de Newton utilise la relation de récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)}$$

pour trouver les solutions de $P(x) = 0$. Programmer la méthode de Newton pour trouver l'unique racine réelle du polynôme $X^5 - X - 1$. On admettra que dans ce cas, il suffit de prendre x_0 suffisamment grand ($x_0 = 2$ suffit) pour avoir convergence de (x_n) vers la solution.

Exercice 7 :
À l'aide de la méthode de Newton, écrire une fonction qui calcule la racine carrée d'un réel positif ($\sqrt{a}$ est racine de $X^2 - a$). Comparer avec les valeurs rendues par la fonction `sqrt` de la bibliothèque `cmath`.

Exercice 8 :
À l'aide d'un schéma d'Euler, résoudre numériquement l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} y'(t) + y^3(t) = \sin(t), \quad t \geq 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Pour rappel, le schéma d'Euler de pas de temps δ approche la solution y de $y' = f(t,y)$ par $y(n\delta) \simeq \bar{y}_n$, où la suite $(\bar{y}_n)$ est définie par

$$\bar{y}_0 = y(0), \ \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \delta f(n\delta, \bar{y}_n).$$

Avec l'aide de `gnuplot`, tracer la solution obtenue.

Exercice 9 :
Simuler numériquement une trajectoire du mouvement Brownien. Pour cela, on subdivisera l'intervalle $[0, 1]$ en N intervalles de longeur $1/N$. La valeur de (W_t) en $t = k/N$ est donnée par

$$W_{k/N} = \sum_{q=1}^{k} W_{q/N} - W_{(q-1)/N} = \sum_{q=1}^{k} N^{-1/2} G_q,$$

où les G_q sont des variables de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendantes. Avec l'aide de `gnuplot`, tracer le processus obtenu.

Exercice 10 :
En utilisant la méthode de Monte Carlo, donner, avec un intervalle de confiance, la moyenne et la variance des lois de probabilité suivantes :
- la loi uniforme sur $[0, 1]$;
- la loi de Bernoulli de paramètre p ;
- la loi normale centrée réduite ;
- la loi exponentielle de paramètre 1 ;
- la loi de Cauchy (de densité $(\pi(1 + x^2))^{-1}$) ;
- la loi de densité $2x^{-3}\mathbf{1}_{x>1}$.