

TP1 : Lois discrètes

Le logiciel Scilab, développé par l'Inria (Institut national de recherche en informatique et en automatique) est téléchargeable gratuitement depuis

<http://www.scilab.org>

Il peut être installé indifféremment sous Windows, Linux et Mac (avec X11).

Scilab possède une aide en ligne très complète qui peut être consultée grâce à la commande `help` permettant de rechercher un mot dans l'ensemble du manuel d'aide et à la commande `apropos` qui permet une recherche par mot-clé; ou plus simplement en cliquant sur l'icône d'aide dans la barre de menu.

Le logiciel, une fois lancé, se présente sous la forme d'une fenêtre de commande où peut être exécutée toute instruction. Afin de réaliser un programme plus élaboré (appelé aussi script), il est cependant préférable d'écrire celui-ci dans un fichier (à enregistrer sous l'extension `.sci` ou `.sce`) pouvant être lancé ensuite dans la fenêtre principale à l'aide du menu.

Exercice 1. Créer un fichier TP1.sce dans lequel vous allez écrire vos instructions scilab.

Exercice 2. (Un exemple scilab) Essayer les instructions suivantes :

1. `clf();`
`clear`
`n=1000;`
`Y=rand(n,1);`

Renvoie un vecteur colonne dont les entrées sont n réalisations pseudo-aléatoires selon la loi uniforme sur $[0,1]$ et pseudo-indépendantes

2. `moyenne=sum(Y)/length(Y)`

Moyenne arithmétique = $\frac{1}{n}(Y(1) + \dots + Y(n))$

3. `plot2d([1:n], Y)`

Tracé du vecteur Y . Dans ce cas $[1 : n]$ est facultatif

4. `xset('window',1)`
`histplot(20,Y)`

Histogramme à 20 classes

Simulations de lois discrètes

Exercice 3. (Loi de Bernoulli) Soit U une loi uniforme sur $[0, 1]$ et soit $p \in]0, 1[$

1. Vérifier que la variable aléatoire $X = \mathbf{1}_{\{U \leq p\}}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p .
2. Utiliser la question 1, pour simuler un échantillon indépendant $(X_i)_{1 \leq i \leq N}$ de taille N de la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0.3$, pour $N = 100, 1000$ et 10000 .
3. Calculer pour chaque N , la quantité

$$\frac{\#\{i \in \{1, \dots, N\} \text{ tel que } X_i = 1\}}{N}$$

et le comparer avec p . Expliquer ce que l'on observe.

Exercice 4. (Loi Binomiale) Soit $n = 30$ et $p = 0.4$. Soit $(U_k)_{1 \leq k \leq n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Vérifier, en utilisant un argument du cours, que la variable aléatoire

$$X = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{U_k \leq p}$$

suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

2. Générer un échantillon indépendant de taille $N = 10000$ de la loi binomiale de paramètres (n, p) en utilisant la question précédente. Remarquer que l'on pouvait aussi bien utiliser l'instruction Scilab

`X=grand(10000,1,"bin",30,0.4)`

3. Tracer l'histogramme des fréquences¹ en utilisant la fonction `histplot`.
4. Calculer les poids

$$p_k := \mathbb{P}(X = k), k = 0, \dots, n$$

5. Tracer le graphe $k \in \{0, \dots, n\} \rightarrow p_k$ et le comparer avec l'histogramme des fréquences

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ avec $a_1 := 0.5, a_2 := 1, a_3 := 1.5, a_4 := 2$ et soit $(p_i)_{i=1, \dots, 4}$ les poids associés définis par

$$p_1 = \mathbb{P}(X = a_1) = 3/8 \quad ; \quad p_2 = \mathbb{P}(X = a_2) = 1/8$$

$$p_3 = \mathbb{P}(X = a_3) = 1/8 \quad ; \quad p_4 = \mathbb{P}(X = a_4) = 3/8$$

1. Comment simuler X ?
2. Simuler un échantillon indépendant de taille $N = 10000$ de X et tracer l'histogramme des fréquences.
3. Comparer l'histogramme au graphe $i \in \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow p_i$.

1. pour $k \in \{1, \dots, n\}$

$$\frac{\#\{i \in \{1, \dots, N\} \text{ tel que } X_i = k\}}{N}$$