TP2 : Lois à densité

Créer un fichier TP2.sce dans lequel vous aller écrire vos instructions scilab.

Exercice 1. (Méthode d'inversion de la fonction de répartition) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{E}(\lambda)$ de densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$.

1. Calculer la fonction de répartition de X.
2. En déduire un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ basé sur la méthode d'inversion de la fonction de répartition.
3. Simuler un échantillon de taille $N = 10000$ de variables $\mathcal{E}(0.25)$ indépendantes et représenter la densité empirique (l'histogramme) de cet échantillon avec la fonction `histplot`.
4. Comparer les densités empirique et théorique (en utilisant `histplot` et `plot2d` sur la même fenêtre graphique).

Exercice 2. Répondre aux mêmes questions de l'exercice (1) pour une variable aléatoire de Pareto de paramètre $\theta = 3$. On rappelle qu'une variable aléatoire X suit une loi de Pareto de paramètre $\theta > 0$ si sa densité s'écrit

$$f(x) = \theta x^{-(\theta+1)}\mathbf{1}_{\{x>1\}}.$$

Exercice 3. (Méthode de Box-Muller) Soit R une v.a. de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et Θ une v.a. de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$: $R \sim \mathcal{E}(1/2)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$. R et Θ sont indépendantes.

1. Montrer que $X = \sqrt{R}\cos(\Theta)$ et $Y = \sqrt{R}\sin(\Theta)$ sont des v.a. gaussiennes indépendantes, centrées et réduites. On rappelle que la densité f de la gaussienne centrée réduite : $\mathcal{N}(0, 1)$ est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$
2. En déduire une simulation sous `SCILAB` de $N = 10000$ réalisations indépendantes de la loi gaussienne centrée réduite.
3. Tracer la densité empirique de votre échantillon et le comparer avec la densité théorique (pour cela utliser les fonctions `histplot` et `plot2d`)

Exercice 4. (Méthode de rejet) On veut simuler une v.a. X de densité f. On suppose qu'il existe une v.a. Y que l'on sait simuler, de densité g vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq cg(x)$, pour une constante $c \geq 1$. On considère l'algorithme suivant :

1. Simuler U de loi $\mathcal{U}([0, 1])$
2. Poser $Z := cg(Y)U$
3. si $Z < f(Y)$, on pose $X = Y$, sinon retour en 1).

Dans le cours, il est montré que cet algorithme fournit la réalisation d'une variable aléatoire X de densité f.

Application à la simulation de la loi normale.

1. Montrer que si X est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors $|X|$ a pour densité
$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{\{x>0\}}$$
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) \leq \sqrt{\frac{2e}{\pi}}e^{-x}$$
3. En déduire un algorithme de simulation $|X|$ par la méthode de rejet.
4. Tracer la densité empirique pour un échantillon de taille $N = 10000$ et la comparer avec la densité théorique de $|X|$.
5. Soit Θ une v.a. valant -1 ou $+1$ avec $\mathbb{P}(\Theta = \pm 1) = 1/2$. Montrer que X a même loi que $\Theta|X|$.
6. Simuler un échantillon indépendant de taille $N = 10000$ de loi normale en utilisant les questions précécentes et comparer les densités théoriques et empiriques.