TP3 : Méthode de Monte Carlo

Créer un fichier TP3.sce dans lequel vous aller écrire vos instructions scilab.

Rappel

La méthode de Monte Carlo est une méthode d'estimation d'intégrales dont le calcul analytique est impossible ou très difficile. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'estimation de la quantité

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathbb{P}_X(dx)$$

Supposons que l'on sait simuler un N-échantillon $\{X_k, 1 \leq k \leq N\}$ indépendantes identiquement distribuées selon la loi de X.
Si $\mathbb{E}(|f(X)|) < \infty$, alors par la loi forte des grands nombres, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k) = \mathbb{E}f(X) \text{ convergence p.s.}$$

si de plus, $\mathbb{E}(|f(X)|^2) < \infty$, alors la vitesse de convergence est donnée par le théorème de la limite centrale :

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}(\bar{X}_N - \mathbb{E}f(X)) = \mathcal{N}(0, \sigma^2) \text{ convergence en loi}$$

avec

$$\bar{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(X_k) \quad ; \quad \sigma^2 = \mathbb{E}f(X)^2) - \mathbb{E}f(X))^2$$

On en déduit un intervalle de confiance pour $\mathbb{E}[f(X)]$, avec un niveau de confiance à 95% :

$$\mathbb{E}[f(X)] \in [\bar{X}_N - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{X}_N + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}].$$

Si on ne connait pas σ^2, on peut l'estimer par

$$S_n^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(f(X_k) - \bar{X}_N)^2.$$

Exercice 1. Soient U_1, U_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{U}[-1, 1]$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(U_1^2 + U_2^2 \leq 1) = \frac{\pi}{4}$.
2. Déduire une estimation de π par la méthode de Monte Carlo pour un nombre de simulations N. Donner un intervalle de confiance de niveau 95%.
3. Tracer le graphique des estimations de π en fonction du nombre de simulations.

Exercice 2. On cherche à estimer, pour tout $a > 0$, l'intégrale

$$I(a) = \int_0^a e^{-x^2} dx$$

1. On peut estimer $I(a)$ à partir d'un échantillon de loi uniforme.
   (a) Ecrire $I(a)$ sous la forme $\mathbb{E}f(U)$ où $U \sim \mathcal{U}[0, 1]$ et f est à expliciter.
   (b) En déduire une estimation de $I(\sqrt{2})$ et de $I(2)$ par la méthode de Monte Carlo pour un nombre de simulations N. Donner dans chacun des cas un intervalle de confiance de niveau 95%.
   (c) Tracer le graphique des moyennes estimées en fonction du nombre de simulations.

2. On peut également estimer $I(a)$ à partir d'un échantillon de loi gaussienne.
   (a) Ecrire $I(a)$ sous la forme $\mathbb{E}f(X)$ où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et f est à expliciter.
   (b) En déduire une estimation de $I(\sqrt{2})$ et de $I(2)$ par la méthode de Monte Carlo pour un nombre de simulations N. Donner dans chacun des cas un intervalle de confiance de niveau 95%.
   (c) Tracer le graphique des moyennes estimées en fonction du nombre de simulations.
3. Comparer les deux méthodes à partir des intervalles de confiances trouvés.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de densité f donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2}{3}(x\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{[1,2]}(x))$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit $U \sim \mathcal{U}([0,2])$ de densité g. Montrer qu'il existe une constante $c \geq 1$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \leq cg(x).$$

3. Ecrire un algorithme de simulation de X par la méthode de rejet.
4. Donner une estimation de $\mathbb{E}\big(e^{X^2}\big)$.

Exercice 4. On s'intéresse à l'estimation de l'intégrale

$$J = \int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}dx \tag{1}$$

1. Soit X une v.a. de loi de Pareto de paramètre 1 et de densité $f(x) = x^{-1}\mathbf{1}_{\{x\geq 1\}}$. Écrire J sous la forme $\mathbb{E}f(X)$ où f est une fonction à déterminer.
2. En déduire une estimation de J par la méthode de Monte-Carlo et donner un intervalle de confiance pour J de niveau de confiance 95%.
3. Montrer que

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^3}dx \tag{2}$$

   et en déduire une autre estimation de J par la méthode de Monte-Carlo.
4. Comparer les deux méthodes.