TP4 : Chaînes de Markov

Créer un fichier TP4.sce dans lequel vous aller écrire vos instructions scilab.

Exercice 1. Rappels :

1. Qu'est ce qu'une chaîne de Markov ?
2. Qu'est ce qu'une probabilité invariante ?
3. Rappeler le théorème ergodique pour les chaînes de Markov.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2\}$ de matrice de transition

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

1. Simuler une trajectoire de taille $N = 50000$ de la chaine partant de $X_0 = 1$.
2. Donner une estimation de la matrice de transition associée à la trajectoire simulée dans la question précédente et la comparer à $\mathbf{Q}$.
3. Déterminer l'unique probabilité invariante π associée à X_n.
4. Soit $x \in E$, quelle est la limite p.s. de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{\{X_k=x\}}$?
5. Donner une estimation de $\pi(1)$ et $\pi(2)$ à partir de la trajectoire simulée dans la question 1.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0.6 & 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.1 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.7 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la chaîne admet une unique probabilité invariante π et la déterminer.
2. Quelle est la limite p.s. de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f(X_k)$, où f est définie pour tout $x \in E$ par $f(x) = x^2$?
3. Simuler une trajectoire de taille $N = 50000$ de la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$. En déduire une estimation de $< \pi, f >$?