Université Pierre et Marie Curie
Licence de mathématiques
3M246 - Processus et simulation

TP noté du 11 avril 2016

Question 1 :
On considère une variable aléatoire X, vérifiant $\mathbb{P}(X = 1) = 1/6$, $\mathbb{P}(X = 2) = 1/3$ et $\mathbb{P}(X = 4) = 1/2$.

1. Stocker $N = 10000$ réalisations indépendantes de X dans un vecteur `v`.
2. Tracer l'histogramme à trois bâtons associé à `v`, auquel on superposera les probabilités théoriques de la variable X.

Question 2 :
On considère la densité de probabilité

$$f(x) = \cos(x)\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}.$$

1. Simuler $N = 100000$ réalisations indépendantes de tirages aléatoires de densité f, stockées dans un vecteur `v`.
2. Tracer l'histogramme associé à `v` et le superposer à la densité de f.

Question 3 :
À l'aide de la méthode de Monte Carlo, donner un intervalle de confiance à 95% pour la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \log(\cos(x))dx$, en utilisant $N = 10000$ variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ (la valeur théorique est -0.18754...).

Question 4 :
On considère la matrice de transition

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Simuler les $N = 10000$ premiers pas d'une réalisation d'une chaîne de Markov de matrice de transition P, issue de $X_0 = 1$.
2. À partir de la trajectoire simulée précédemment, donner une approximation de la probabilité invariante de la chaîne (dont on admettra l'unicité).
3. Donner une approximation de la moyenne de la fonction $f(i) = i$ sous la probabilité invariante.