Université Pierre et Marie Curie
Licence de mathématiques
3M246 - Processus et simulation

TP noté du 2 mai 2016

Question 1 :
On considère une variable aléatoire X, vérifiant $\mathbb{P}(X = 0) = 0.5$, $\mathbb{P}(X = 3) = 0.1$ et $\mathbb{P}(X = 4) = 0.4$.

1. Stocker $N = 10000$ réalisations indépendantes de X dans un vecteur `v`.
2. Tracer l'histogramme à trois bâtons associé à `v`, auquel on superposera les probabilités théoriques de la variable X.

Question 2 :
On considère la densité de probabilité

$$f(x) = \frac{3}{7}x^2\mathbf{1}_{[1,2]}.$$

1. Simuler $N = 100000$ réalisations indépendantes de tirages aléatoires de densité f, stockées dans un vecteur `v`.
2. Tracer l'histogramme associé à `v` et le superposer à la densité de f.

Question 3 :
À l'aide de la méthode de Monte Carlo, donner un intervalle de confiance à 95% pour la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^5}$, en utilisant $N = 10000$ variables indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ (la valeur théorique est 0.65389...).

Question 4 :
On considère la matrice de transition

$$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Simuler les $N = 10000$ premiers pas d'une réalisation d'une chaîne de Markov de matrice de transition P, issue de $X_0 = 1$.
2. À partir de la trajectoire simulée précédemment, donner une approximation de la probabilité invariante de la chaîne (dont on admettra l'unicité).
3. Donner une approximation de la moyenne de la fonction $f(i) = i$ sous la probabilité invariante.