**TP 2 : Lois continues**

Vos programmes sont à écrire dans un fichier `TP2.py`.

# 1 Méthode de la fonction de répartition inverse

Pour chacun des exemples 1.1 à 1.4 :

1. En utilisant la méthode de la fonction de répartition inverse, écrire une fonction renvoyant une simulation d'une variable aléatoire suivant la loi en question ;
2. Simuler un échantillon de taille 10000 de la variable ;
3. En tracer un histogramme que l'on comparera avec la densité de la loi.

## 1.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ a pour densité $\mathbf{1}_{x>0}\lambda e^{-\lambda x}$, et pour fonction de répartition $\mathbf{1}_{x>0}(1 - e^{-\lambda x})$, où $\lambda > 0$. Les simulations pourront être faites avec la valeur $\lambda = 1/2$.

## 1.2 Loi de Cauchy

La loi de Cauchy a pour densité $(\pi(1 + x^2))^{-1}$ et pour fonction de répartition $\frac{1}{\pi}(\arctan(x) + \pi/2)$.

## 1.3 Loi de Pareto

La loi de Pareto a pour densité $\mathbf{1}_{x>1}\theta x^{-1-\theta}$, où $\theta > 0$ et pour fonction de répartition $\mathbf{1}_{x>1}(1-x^{-\theta})$. Les simulations pourront être faites avec $\theta = 1$.

## 1.4 Loi de l'arcsinus

La loi de l'arcsinus a pour densité $\mathbf{1}_{-1<x<1}\frac{1}{\pi}(1 - x^2)^{-1/2}$ et sa fonction de répartition est donnée par $\mathbf{1}_{-1<x<1}\left(\frac{1}{\pi}\arcsin(x) + 1/2\right) + \mathbf{1}_{x>1}$.

# 2 Loi normale par l'algorithme de Box-Muller

La méthode de la fonction de répartition inverse ne s'applique pas aisément à la loi normale, car sa fonction de répartion et son inverse n'ont pas d'expression analytique simple et efficacement calculable. On emploie donc une autre méthode pour simuler des variables de loi normale.

Par le calcul, on peut montrer que si $R$ suit la loi exponentielle de paramètre $1/2$ et si $\Theta$ est uniforme sur $[0, 2\pi]$, alors les variables

$$X = \sqrt{R}\cos(\Theta) \text{ et } Y = \sqrt{R}\sin(\Theta)$$

sont indépendantes et suivent la loi normale centrée réduite, de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$.

1. Écrire une fonction qui renvoie une simulation du couple $(X, Y)$ ;
2. Afficher 10000 réalisations du couple $(X, Y)$ sous forme de points dans le plan ;
3. Afficher un histogramme de 10000 réalisations de $X$, et le comparer avec la densité Gaussienne.

# 3 Lois discrètes obtenues à partir de lois continues

## 3.1 Loi géométrique

Si $X$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda$, alors $[X]$ (la partie entière de $X$) est une variable de loi géométrique de paramètre $e^{-\lambda}$ :

$$\mathbb{P}([X] = n) = e^{-\lambda n}(1 - e^{-\lambda}),\ n \geq 0.$$

Tracer un histogramme de 10000 réalisations de la loi géométrique de paramètre $p$ (on pourra prendre $p = 0.5$) et en tracer un histogramme. Comparer cet histogramme avec les probabilités théoriques.

## 3.2 Loi de Poisson

La loi de Poisson n'est pas une loi à densité, mais elle apparaît naturellement dans un modèle faisant intervenir de telles lois (le *processus de Poisson*).

Soit $(U_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables indépendantes et de même loi uniforme sur $[0, 1]$. On note $X = \inf\{n \geq 0, \prod_{i=0}^{n} U_i < e^{-\lambda}\}$. La variable $X$ suit alors une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

Simuler 10000 réalisations de la loi de Poisson (on pourra prendre $\lambda = 3$) et en tracer un histogramme. Comparer cet histogramme avec les probabilités théoriques de la loi de Poisson : $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.