TP 3 : Méthode du rejet

Vos programmes sont à écrire dans un fichier `TP3.py`.

1 Variable uniforme sur un domaine borné

On se donne A et B deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$, avec $B \subset A$. La méthode du rejet permet de simuler des variables de loi uniforme sur B si l'on sait simuler des variables de loi uniforme sur A. Le principe est le suivant : si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur A, alors en posant $T = \inf\{n,\ X_n \in B\}$, la variable X_T suit la loi uniforme sur B. Par ailleurs, on remarque que T (le nombre de variables à simuler) suit une loi géométrique de paramètre $|B|/|A|$ (où $|A|$ désigne le volume de A). Notamment, le nombre de variables à simuler sera d'autant plus faible que les volumes de A et B sont proches.

1. Grâce à la méthode du rejet, simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur le disque unité, en partant de variables uniformes sur le carré $[-1,1]^2$.

   Plus précisément, si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites indépendantes de variables indépendantes de loi uniforme sur $[-1,1]$, (notamment, les couples (U_n, V_n) sont de loi uniforme sur $[-1,1]^2$), alors en posant
   $$T = \inf\{n \in \mathbb{N}, U_n^2 + V_n^2 < 1\},$$
   le couple (U_T, V_T) suit la loi unforme sur le disque de centre 0 et de rayon 1.
2. Si (X,Y) est un couple aléatoire de loi uniforme sur le disque unité et si on pose $R = X^2+Y^2$, $T = \sqrt{-2\ln(R)/R}$, alors on peut montrer que les variables aléatoires TX et TY sont indépendantes de loi normale centrée réduite. En utilisant cette propriété, écrire une fonction qui renvoie une simulation de variable de loi normale centrée réduite.

   Vérifier le résultat en comparant un histogramme des valeurs obtenues avec la densité de la loi normale centrée réduite.

2 Simulation de variables de densité donnée

La méthode du rejet telle que décrite dans la partie précédente permet de simuler des variables de densité f connue. La remarque clé permettant cela est que si (X,U) est un couple de variables indépendantes telles que X a pour densité f et U est uniforme sur $[0,1]$, alors le couple (X,Y) avec $Y = U \times cf(X)$ (avec $c > 0$ un réel fixé) suit la loi uniforme sur l'ensemble $G_{cf} = \{(x,y),\ 0 < y < cf(x)\}$ (l'"aire sous le graphe" de la fonction cf).

Inversement, si (X,Y) est un couple dont la loi est uniforme sur G_{cf}, alors X a pour densité f.

On a donc ramené le problème de simuler une variable de densité f à celui de simuler des variables uniformes sur G_{cf}, ce qui peut se faire grâce à la méthode du rejet.

2.1 Densité bornée sur un segment

On souhaite simuler une variable X dont la densité est donnée par exemple par

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}(1+\sin(x))\mathbf{1}_{[0,2\pi]}.$$

1. Grâce à la méthode du rejet, écrire une fonction qui simule un couple (X,Y) dont la loi est uniforme sur l'ensemble $G_{2\pi f} = \{(x,y) \in]0,2\pi[\times]0,2[, y < 1+\sin(x)\}$ et qui renvoie la valeur de X.
2. Vérifier que la fonction précédente renvoie des simulations d'une variable de loi $f(x) = \frac{1}{2\pi}(1+\sin(x))\mathbf{1}_{[0,2\pi]}$ en comparant un histogramme des valeurs obtenues avec le tracé de f.

2.2 Cas général

On donne un exemple de simulation par méthode du rejet d'une variable de densité donnée f à partir de variables admettant une densité g, sous la condition $f \leq cg$ pour un certain $c > 0$. Plus précisément on va simuler une variable aléatoire de loi normale centrée réduite à partir de variables de loi exponentielle.

Remarquons tout d'abord que pour $x \in [0, \infty[$, on a l'inégalité

$$e^{-x^2/2} \leq Ce^{-x},$$

avec $C = e^{1/2}$.

1. Écrire une fonction qui :
   (a) simule une variable de loi uniforme sur l'ensemble $G_1 = \{(x, y) \in]0, \infty[^2,\ y < Ce^{-x}\}$, en utilisant une variable de loi exponentielle de paramètre 1 ;
   (b) simule par méthode du rejet une variable de loi uniforme sur l'ensemble $G_2 = \{(x, y) \in]0, \infty[^2, y \leq e^{-x^2/2}\}$;
   (c) renvoie une variable de même loi que $|X|$, où X est de loi normale centrée réduite.
2. Vérifier la sortie de la fonction ainsi écrite en comparant l'histogramme des valeurs fournies par la fonction avec la densité de la loi normale centrée réduite.
3. Que se passe-t-il si on remplace la valeur de C par une valeur plus grande ?