TP 4 : Théorèmes de convergence

1 La loi des grands nombres

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes et de même loi à partir de laquelle on définit

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Quand n tend vers l'infini, le comportement asymptotique de Y_n est décrit de la manière suivante :

— Si les X_i sont intégrables, alors $Y_n \to \mathbb{E}X_1$ presque sûrement (c'est la loi des grands nombres) ;

— Si les X_i ne sont pas intégrables, alors la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est presque sûrement non bornée ;

— Si les X_i ne sont pas intégrables et sont positifs, alors $Y_n \to \infty$ presque sûrement.

Nous allons illustrer ces différents comportements.

1. Écrire une fonction `LGN` qui :
   — prend en argument une fonction `X` telle que les appels successifs de `X()` soient des réalisations indépendantes des X_i...
   — ... calcule les Y_n associés à la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi simulée...
   — ... et affiche la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au rang $n = 10000$.
2. Afficher 5 réalisations de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où les X_i suivent la loi uniforme sur $[0,1]$. Même question, si les X_i suivent la loi de Pareto de paramètre 2 (qui se simule comme $1/\sqrt{U}$, où U est de loi uniforme sur $[0,1]$). Qu'observe-t-on ?
3. Afficher 5 réalisations de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où les X_i suivent une loi de Cauchy (qui se simule comme $\tan(\pi U)$, où U est uniforme sur $[0,1]$). Qu'observe-t-on ?
4. Afficher 5 réalisations de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où les X_i suivent une loi de Pareto de paramètre 0.5 (qui se simule comme $1/U^2$, où U est uniforme sur $[0,1]$). Qu'observe-t-on ?

2 Le théorème limite central

D'après la loi des grands nombres, pour des variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes, de même loi et intégrables, alors la quantité $X_1+\ldots+X_n$ est presque sûrement équivalente à $n\mathbb{E}[X_1]$. On cherche le comportement asymptotique de la *loi* de $X_1+\ldots+X_n$ (en particulier, on voudrait étudier les écarts avec l'équivalent $n\mathbb{E}X_1$, écarts qui devraient être négligeables devant n).

5. Afficher un histogramme de 10000 simulations de $X_1+\ldots+X_n$, pour $n = 1,\ldots,12$, où les X_i sont des variables aléatoires de loi uniforme sur $[2,3]$.
   Qu'observe-t-on ? Quelle est la moyenne de $X_1+\ldots+X_n$? Sa variance ?

Le théorème limite central a pour objet de décrire l'erreur commise entre Y_n et sa limite $\mathbb{E}X_1$ (dans le cas où les X_i sont intégrables). Plus précisément, si on pose

$$Z_n = \sqrt{\frac{n}{\mathbb{V}(X_1)}}\left(Y_n - \mathbb{E}(X_1)\right),$$

alors Z_n converge en loi vers une variable de loi normale centrée réduite, sous la condition $\mathbb{E}X_1^2 < \infty$. Noter que si l'on cherche deux constantes a_n et b_n telles que $a_nY_n + b_n$ soit de moyenne nulle et de variance 1, alors on tombe sur l'expression de la définition de Z_n.

6. Afficher l'histogramme de 10000 simulations de la variable Z_n, et le comparer avec le graphe de la densité Gaussienne centrée réduite, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. On prendra le cas où les X_i sont uniformes sur $[0,1]$.