Université Pierre et Marie Curie **L3**
Période 2 **3M246 : Processus et simulation**

TP 6 : Chaînes de Markov

Dans ce TP, on aura besoin de manipuler des matrices. Il sera donc pratique d'utiliser la class `matrix` de la bibliothèque `numpy` :
`from numpy import matrix`
Une matrice peut être définie par
`A = matrix("1 0 0 ; 0 1 0 ; 0 0 1")`
(les lignes sont séparées par des points-virgules ; les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules ou des espaces). Une autre possibilité est
`A = matrix([[0.0]*n]*m)`
(`[0.0]*n` est une liste contenant `n` fois la valeur `0.0`, et `[[0.0]*n]*m` est une liste contenant `m` fois la liste `[0.0]*n`, interprétée comme la liste des lignes de la matrice ; on obtient donc la matrice nulle de taille `m`×`n`).

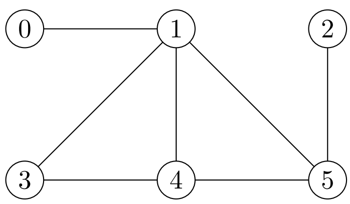
On peut alors utiliser une syntaxe intuitive pour manipuler ces matrices (`3*A`, `A+A`, `A*A`, `A[0,2]=3`, `A**10`, etc.).
Attention : une matrice de taille N a ses coefficients indexés de 0 à $N-1$.

1 Simulation d'une trajectoire

1. Écrire une fonction `markov` prenant deux arguments `i` et `P` correspondant respectivement à la position actuelle d'une chaîne de Markov et à sa matrice de transition, et qui renvoie la position suivante de la chaîne.
   Autrement dit, `markov(i,P)` renvoie une réalisation de la loi discrète
   $$(\texttt{P[i,0]}, \texttt{P[i,1]}, \ldots, \texttt{P[i,N-1]}).$$
2. Tracer une trajectoire de 100 pas d'une chaîne de Markov de matrice de transition
   $$P = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Le *modèle d'Ehrenfest* est défini comme suit : on dispose de deux compartiments A et B dans lesquels sont réparties N particules indiscernables. À chaque instant entier, on choisit une particule uniformément parmi les N, et on fait passer cette particule d'un compartiment à l'autre. On note X_n le nombre de particules qui se trouvent dans le compartiment A au temps n.
   (a) Quelle est la matrice de transition de la chaîne de Markov $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
   (b) Tracer une trajectoire de 1000 pas du modèle d'Ehrenfest avec $N = 100$, partant d'un compartiment A initialement vide.

2 Théorème ergodique et temps de retour

On considère la marche aléatoire aux plus proches voisins sur le graphe suivant :



4. Écrire la matrice de transition associée à cette marche aléatoire.

5. Simuler une trajectoire de 1400 pas issue d'un point quelconque du graphe, et faire l'histogramme de tous les sites visités.
6. Quelle est la loi invariante μ de la chaîne ? On pourra s'intéresser au nombre d'arêtes issues de chaque sommet. Comparer avec l'histogramme obtenu.
7. Pour chaque sommet i du graphe, simuler 1000 trajectoires issues de i jusqu'à leur temps de retour en i. Estimer ainsi le temps moyen de retour, et comparer avec la moyenne théorique (donnée par les inverse des poids de chaque sommet sous la mesure invariante).

3 Convergence en loi

On considère les deux matrices de transition

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. Calculer les matrices P_1^{100} et P_1^{101}, ainsi que les matrices P_2^{100} et P_2^{101}. Qu'observe-t-on ? D'où vient la différence ?