

TD 1 : Manipulation sur les espaces probabilisés

Exercice 1.

Soient A et B deux évènements d'un même espace probabilisé. Montrer les relations suivantes entre indicatrices :

$$\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}.$$

Exercice 2.

Soient A et B deux évènements. Montrer que les trois évènements $A \setminus B$, $B \setminus A$ et $A \cap B$ sont disjoints et que leur union est $A \cup B$.

Exercice 3.

Pour chacune des situations suivantes, donner un ensemble E tel que la situation puisse être représentée par une (des) variable(s) aléatoire(s) $X : \Omega \rightarrow E$.

1. Un lancer de dé.
2. Deux lancers successifs d'un même dé, et on s'intéresse à la somme des nombres obtenus.
3. Lancer d'un même dé indéfiniment.
4. Durée de vie d'un individu.
5. Marche aléatoire simple sur \mathbb{Z} .

Décrire les évènements suivants comme des sous-ensembles de l'espace des états Ω , en fonction des variables aléatoires utilisées (les numéros se rapportent aux situations ci-dessus).

2. "La somme des résultats obtenus est égale à 4".
2. "Les deux jets donnent le même résultat".
3. "Le premier 1 est obtenu au N -ième lancer".
5. "La marche reste positive pendant les quatre premiers pas".

Exercice 4.

Soient A, B, C trois évènements d'un même espace probabilisé. Exprimer les phrases suivantes en termes ensemblistes, en fonction de A, B et C .

- A seulement est réalisé ;
- au moins un des trois évènements est réalisé ;
- au plus deux des trois évènements sont réalisés ;
- si A est réalisé, alors un des évènements B et C l'est ;
- si A est réalisé, alors au plus un des évènements B et C l'est ;