Université Pierre et Marie Curie
Master MEEF 1ère année
2016-2017

TD 2 : Espérance conditionnelle, indépendance

Exercice 1.
On considère le lancer de deux dés dont les résultats sont notés X et Y. Pour $2 \leq k \leq 12$, que vaut $\mathbb{P}(X = n | X + Y = k)$, pour $n = 1, \ldots, 6$?

Exercice 2.
Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $\mathbb{P}(X = n, Y = m) = \frac{1}{N^2}$ pour tous entiers n et m de $\{1, \ldots, N\}$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Les variables U et V sont elles indépendantes ?
2. Calculer $P(U = n, V = m)$ pour tous $1 \leq n, m \leq N$.
3. Calculer $\mathbb{P}(V = m)$ pour tout $1 \leq m \leq N$.
4. Que vaut $\mathbb{P}(U = n | V = m)$, pour n et m dans $\{1, \ldots N\}$?
5. Que vaut $\mathbb{P}(X = n | V = m)$, pour n et m dans $\{1, \ldots N\}$?

Exercice 3.
Le tableau suivant récapitule les taux de succès de deux traitements permettant de soigner les calculs rénaux. Les traitements seront appelés *traitement A* et *traitement B*. Par ailleurs, on regroupe les patients en deux groupes, suivant la taille des calculs rénaux.

	Traitement A	Traitement B
Petits calculs	81/87	234/270
Gros calculs	192/263	55/80

— Calculer la probabilité de succès conditionnellement à l'utilisation de chacun des traitements ;
— Calculer la probabilité de succès conditionnellement à l'utilisation de chacun des traitements *et* de la taille des calculs ;
— Explication ?

Exercice 4.
Une urne contient trois boules blanches et deux boules noires. On tire successivement et “au hasard” trois boules dans cette urne, en respectant le protocole suivant : on remet la boule dans l'urne si elle est noire, on ne la remet pas si elle est blanche.

1. Quelle est la probabilité de n'obtenir aucune boule blanche ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules blanches ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une boule blanche ?

Exercice 5.
On choisit une famille “au hasard” parmi toutes les familles ayant deux enfants.

1. Sachant que la famille choisie a au moins un garçon, quelle est la probabilité qu'elle ait deux garçons ?
2. Sachant que l'aîné de la famille choisie est un garçon, quelle est la probabilité que le plus jeune soit aussi un garçon ?

Exercice 6.
On considère trois cartes à jouer de même forme. Les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième en rouge tandis que la troisième porte une face noire et une face rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau puis une carte est tirée au hasard et placée sur la table. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire ?

Exercice 7.
Une urne contient 9 boules indiscernables, numérotée de 1 à 9. On tire une boule "au hasard". Les évènements suivants sont-ils indépendants ?

1. A : "la boule tirée porte un numéro pair",
2. B : "le numéro tiré est multiple de 3".

Répondre à la même question lorsque l'urne contient 12 boules.

Exercice 8.
On considère une urne contenant deux boules noires et une boule blanche. On effectue trois fois de suite les opérations suivantes :

— On tire une boule de l'urne ;
— On replace dans l'urne la boule tirée et on y ajoute une boule supplémentaire de la même couleur.

Ainsi, à chaque étape, l'urne contient une boule de plus.

1. Construire l'arbre de probabilité associé à l'expérience.
2. Quelle est la probabilité de tirer plus de boules noires que de boules blanches ?
3. Pour chaque étape, quelle est le nombre moyen de boules noires dans l'urne ?

Exercice 9.
On dispose d'une urne dans laquelle sont placées n boules noires ou blanches, n étant ici un entier fixé. On ne connaît pas la composition exacte de l'urne, au sens où le nombre de boules noires est une variable aléatoire K vérifiant $\mathbb{P}(K = k) = \frac{1}{n+1}$, pour tout entier $0 \leq k \leq n$. Le nombre de boules blanches est donc $n - K$.

1. On tire une boule dans l'urne. Quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?
2. On remet la première boule dans l'urne, puis on tire de nouveau une boule. Quelle est la probabilité que les deux boules soient de la même couleur ?

Exercice 10.
Une certaine maladie touche une personne sur 10000 dans une population. On dispore pour cette maladie d'un test de dépistage qui n'est pas totalement fiable :

— Si une personne est malade, elle sera testé négative à la maladie avec probabilité 2% ;
— Si une personne est saine, elle sera testé positive à la maladie avec probabilité 1%.

Un individu choisi au hasard est testé positif. Quelle est la probabilité qu'il soit effectivement malade ?