Université Pierre et Marie Curie
Master MEEF 1ère année
2016-2017

TD 3 : Variables aléatoires discrètes, dénombrement

Exercice 1.
Quelle est la probabilité que dans un groupe de 23 personnes, au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même jour ?

Exercice 2.
Dans une course, n chevaux sont au départ. On suppose que tous les ordres d'arrivée à la course sont équiprobables. Calculer la probabilité de gagner le tiercé avec un ticket :

1. dans l'ordre ;
2. dans l'ordre ou dans un ordre différent ;
3. dans un ordre différent.

Exercice 3.
Un joueur de poker reçoit une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité qu'il reçoive :

1. une seule paire (deux cartes de même hauteur) ;
2. deux paires ;
3. un brelan (trois cartes de même hauteur et pas de paire ni de carré) ;
4. un carré (quatre cartes de même hauteur) ;
5. un full (une paire et un brelan) ?

Exercice 4.
Au loto, le joueur doit choisir 6 nombres dans $\{1, \ldots, 49\}$. Un tirage consiste à extraire, sans remise, 6 boules numérotées d'une urne, dont les numéros sont dits gagnants, et une septième boule fournissant le numéro dit complémentaire.

1. Quelle est la probabilité de tirer les 6 numéros gagnants ?
2. Quelle est la probabilité de tirer 5 numéros gagnants et le numéro complémentaire ?

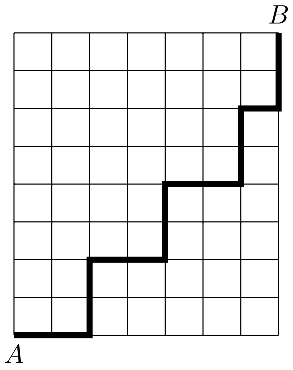
Exercice 5.
On place r boules dans n urnes, chaque boule ayant la même probabilité d'être placée dans chaque urne, et les boules étant placées indépendamment les unes des autres. Quelle est la probabilité qu'une urne donnée contienne exactement k boules ?

Exercice 6.
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables de classe $\mathcal{C}^\infty$. Quel est le nombre de dérivées partielles distinctes d'ordre r ?

Exercice 7.

Combien l'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ a-t-elle de solutions entières positives ou nulles ? de solutions entières strictement positives ?

Exercice 8.
On considère les chemins tracés sur une grille de largeur 7 et de hauteur 8 (voir figure) tels que le chemin aille toujours vers la droite ou vers le haut.



1. Combien de trajets différents peut-on emprunter entre le point A et le point B ?
2. Combien y a-t-il d'octuplets $(n_1, \ldots, n_8)$ d'entiers naturels avec $n_1 + \ldots + n_8 = 8$?
3. Quel est le rapport entre les deux premières questions ?

Exercice 9.
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $T = \sup\{n \in \mathbb{N},\ X_1 = X_2 = \ldots = X_n\}$
et $S = \sup\{n \in \mathbb{N},\ X_{T+1} = X_{T+2} = \ldots = X_{T+n}\}$. Quelles sont les lois de T et S ? Calculer $\mathbb{E}T$ et $\mathbb{E}S$.

Exercice 10.
Donner le nombre d'anagrammes de chacun des mots suivants :

erreur *bonbon* *turlututu.*

Exercice 11.
Un groupe de n étudiants présente un examen. On suppose que chaque étudiant réussit l'examen avec probabilité p, indépendamment des autres, et on note X le nombre d'étudiant ayant réussi l'examen du premier coup. Les $n - X$ autres étudiants sont autorisés à passer un examen de rattrapage, que chacun réussi avec probabilité q, indépendamment des autres. On note Y le nombre d'étudiant ayant réussi l'examen ou le rattrapage.

1. Que vaut $\mathbb{P}(X = k)$ pour k un entier ?
2. Quelle est la probabilité de $\{Y = m\}$ sachant $\{X = k\}$, pour deux entiers k et m ?
3. En déduire la loi de Y.
4. Comment aurait-on pu déterminer la loi de Y par un argument direct ?

Exercice 12.
Une urne contient un nombre N inconnu de boules, toutes blanches. Pour déterminer (une approximation de) N, on pioche n boules dans l'urne, que l'on colorie en bleu.
On remet alors les n boules dans l'urne, puis, après avoir mélangé, on tire à nouveau n boules. On note X le nombre de boules bleue dans ce nouveau tirage.

1. (a) Quelle est la probabilité de $\{X = k\}$ pour un entier k ?
   (b) Quelle est l'espérance de X ?
2. Déterminer la valeur de N telle que $\mathbb{P}(X = k)$ soit maximale, pour un k donné. En quoi la valeur obtenue est elle une approximationn "raisonnable" de N, sachant $X = k$?

Exercice 13.
Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $T = \inf\{n > 0,\ X_n = 1\}$ et $S = \inf\{n > 0,\ X_{T+n} = 1\}$.

1. Montrer que S et T sont deux variables aléatoires indépendantes de loi géométrique de paramètre p.
2. Calculer $P(T = k, S = q | T < n < T + S)$. Les variables T et $T + S$ sont-elles indépendantes sachant $\{T < n < T + S\}$?
3. Quelle est la loi de T sachant $\{T + S = n\}$?

Exercice 14.
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Calculer la loi de $Z = X + Y$.
2. Calculer la loi de $T = \min(X, Y)$.

Exercice 15.
Soit N une variable de loi binomiale de paramètres n et q, et soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre q, et indépendantes de N.

1. (a) Quelle est la loi de $Z = \sum_{k=1}^{N} X_k$? Et celle de $N - Z$?
   (b) Les variables Z et $N - Z$ sont-elles indépendantes ?
2. Mêmes questions si N suit la loi de Poisson de paramètre θ.

Exercice 16.
Soient $(X_k)_{k=1,\dots,n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$. Quelle est la loi de $\max_{k=1}^{n} X_k$?