**Université Pierre et Marie Curie**
**Master MEEF 1ère année**
**2016-2017**

# TD 4 : Variables aléatoires à densité

**Exercice 1.**
Soit $X$ une variable aléatoire réelle de densité $p$. Déterminer en fonction de $p$ la densité de la variable aléatoire $Y$ dans les cas suivants :

1. $Y = aX + b$, où $a$ et $b$ sont des nombres réels, $a \neq 0$ ;
2. $Y = X^2$ ;
3. $Y = \exp(X)$.

Cet exercice peut se résoudre avec le théorème de transfert. Dans le cas où la densité $p$ est supposée continue, on peut également utiliser la fonction de répartition.

**Exercice 2.**
Soit $X$ une variable aléatoire de loi de Cauchy standard. Déterminer la fonction de répartition des variables $X$ et $1/X$. Quelle est la loi de $1/X$ ?

**Exercice 3.**
Soit $U$ une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$, et soit $\alpha$ un réel. Montrer que la loi de $U^\alpha$ admet une densité que l'on explicitera. Quand elles existent, donner la valeur de l'espérance et de la variance de $U^\alpha$.

**Exercice 4.**
Soit $\Theta$ une variable uniforme sur $[0, 2\pi]$.
— Quelle est la loi de $\sin(\Theta)$ ?
— Quelle est la moyenne de $\sin(\Theta)$ ? celle de $|\sin(\Theta)|$ ?
— Calculer la variance de $\sin(\Theta)$.

**Exercice 5.**
Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que les variables aléatoires $= \min(X_1, X_2)$ et $\max(X_1, X_2)$ admettent des densités que l'on explicitera.
Plus généralement, soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Il existe une permutation (aléatoire) $\sigma$ de $\{1, \ldots, n\}$ qui réordonne $(X_1, \ldots, X_n)$, c'est-à-dire que si on pose $Y_i = X_{\sigma(i)}$, alors

$$Y_1 \leq Y_2 \leq \ldots \leq Y_n.$$

Quelle est la loi de $Y_k$, pour $k \in \{1, \ldots, n\}$ ? son espérance ?

**Exercice 6.**
Soient $n$ variables aléatoires indépendantes $(X_1, \ldots, X_n)$ dont la loi commune admet un densité continue $p$. Exprimer en fonction de $p$ la densité de $\min_{i=1}^n X_i$.

**Exercice 7.**

On considère un parquet dont les lattes ont une largeur $d$. On dispose d'une aiguille de longueur $l$, avec $l < d$. Montrer que si on lance l'aiguille sur le parquet, elle tombera en travers d'une rainure du parquet avec probabilité $2l/\pi d$.
Cette expérience a été mise en pratique par Mario Lazzarini avec 3408 aiguilles, parmi lesquelles 1808 ont effectivement croisé une rainure. Dans son expérience, les longueurs vérifiaient la relation $l/d = 5/6$. Qu'en pensez-vous ?

**Exercice 8.**
On choisit au hasard une corde sur un cercle. Quelle est la probabilité que l'angle au centre interceptant cette corde ait une mesure supérieure à $2\pi/3$ ?

**Exercice 9.**
Soient $(X, Y, Z)$ un point aléatoire choisi uniformément sur la sphère unité $\{(x, y, z),\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Quelle est la loi de $X$ ?

**Exercice 10.**
Soient $X$ et $Y$ deux variables Gaussiennes centrées réduites indépendantes. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Z = \arctan\left(\frac{Y}{|X|}\right)$. Quelle est la loi de $Z$ ?

**Exercice 11.**
Soient $(T_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda$. On pose $N_t = \sup\{k \geq 0, T_1 + T_2 + \ldots + T_k < t\}$.

1. Montrer que la variable $T_1 + T_2 + \ldots + T_k$ admet pour densité $\frac{\lambda^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-\lambda t}$.
2. Montrer que $N_t$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda t$.
3. Soient $s \leq t$ deux réels. Calculer $\mathbb{P}(T_1 \leq s | N_t = 1)$. Quelle est la loi de $T_1$ conditionnellement à $\{N_t = 1\}$ ?