Université Pierre et Marie Curie
Master MEEF 1ère année
2016-2017

TD 5 : Suites de variables aléatoires

Exercice 1.
[Jeu de Yam's]
Cet exercice a pour but de calculer la probabilité de gagner au jeu de Yam's. On rappelle les règles de ce jeu :
— on lance 5 dés standards ;
— parmi ces 5 dés, on met de côté les dés de son choix, et on relance les autres ;
— on réitère une fois cette dernière étape avec les 5 valeurs obtenues.
On gagne si on obtient 5 dés de même valeur. On adopte la stratégie suivante qui se trouve être la stratégie maximisant la probabilité de gagner : à chaque lancer, on conserve le plus grand groupe de dés de même valeurs, et on relance tous les autres.
Une fois cette stratégie fixée, la taille X_i du plus grand groupe de dés de même valeur au boût du $i$ème lancer est une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Écrire la matrice de transition de la chaîne $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$.
2. Exprimer la loi de X_1.
3. En déduire la probabilité de gagner au jeu de Yam's, qui correspond à $\mathbb{P}(X_3 = 5)$.

Exercice 2.
[Marche aléatoire sur un graphe]
On considère un graphe fini. Plus précisément, on considère un ensemble $\{1, \dots, N\}$, dont on va relier certains des éléments deux par deux. Si on pose $A_{ij} = 1$ quand deux éléments sont reliés, et $A_{ii} = 0$, sinon, on obtient une matrice symétrique A de diagonale nulle (on considère que qu'un point ne peut pas être relié à lui-même.
On définit une marche aléatoire sur le graphe de la façon suivante : X_0 est une variable aléatoire quelconque à valeurs dans $\{1, \dots, N\}$. Conditionnellement à $X_n = i$, la variable X_{n+1} suit une loi uniforme parmi les j tels que $A_{ij} = 1$.

1. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.
2. Montrer que la mesure $(\mu_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ définie par $\mu_i = \sum_j A_{ij} / \sum_{k,j} A_{k,j}$ est une mesure de probabilité invariante pour la chaîne.

Exercice 3.
[Le modèle d'Ehrenfest]
On considère deux compartiments A et B, dans lesquels sont placé N particules. À chaque instant entier, on choisit uniformément une des N particule, et on la fait changer de compartiment.

1. Montrer que si X_n est le nombre de particules dans le compartiment A à l'instant n, alors $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov dont on précisera la matrice de transition.

2. Montrer que la loi binomiale de paramètres N et $1/2$ est une mesure invariante pour cette chaîne de Markov.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la conclusion de l'exercice précédent. On pourra représenter la position des particules par un N-uplet $(x_1, \ldots, x_N)$ où x_i vaut 1 si la $i$ème particule est dans le compartiment A vaut 0 sinon.

Exercice 4.
[Marche aléatoire absorbée]
On considère une marche aléatoire sur l'ensemble $\{0, \ldots, N\}$. Quand la marche se trouve au point i, elle a une probabilité $1/2$ d'aller en $i-1$ et $1/2$ d'aller en $i+1$. Seule exception : partant des points 0 et N, la marche ne bouge plus, avec probabilité 1. On parle donc d'une marche aléatoire *absorbée* aux points 0 et N. Par conséquent, il y a *a priori* trois comportements possibles en temps long :
— ou bien la chaîne finit absorbée en 0 ;
— ou bien elle finit absorbée en N ;
— ou bien la suite n'atteint jamais les points 0 et N.
On notera $(X_n)_{n \in N}$ la suite des valeurs prises par la marche.

1. Écrire la matrice de transition de $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Dans cette question, on va calculer la probabilité de finir absorbé à l'une ou l'autre des extrémités.
   On désigne par G et D les deux évènements
   $$G = \{X_n = 0 \text{ à partir d'un certain rang}\} \text{ et } D = \{X_n = N \text{ à partir d'un certain rang}\}.$$
   On note $\gamma_i = \mathbb{P}(G | X_0 = i)$ et $\delta_i = \mathbb{P}(D | X_0 = i)$.
   (a) Montrer les relations, pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$,
   $$\gamma_i = \frac{1}{2}(\gamma_{i+1} + \gamma_{i-1}) \text{ et } \delta_i = \frac{1}{2}(\delta_{i+1} + \delta_{i-1})$$
   ainsi que
   $$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_N = 0, \quad \delta_0 = 0, \quad \delta_N = 1.$$
   (b) En déduire l'expression de γ_i et δ_i pour tout i.
   (c) En déduire la probabilité que la marche ne soit jamais absorbée, en partant d'un point i quelconque (il s'agit de la probabilité $\mathbb{P}(D^c \cap G^c | X_0 = i)$).
3. Dans cette question, on va donner la loi explicite du temps d'absorbtion, pour une condition initiale particulière.
   On suppose que X_0 suit la loi $(C \sin(k\pi/N))_{k=0,\ldots,N}$.
   (a) Donner la valeur de C.
   (b) Quelle est la loi de X_n ?
   (c) Montrer que le temps avant que met la suite à atteindre les points 0 ou N suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.