Interrogation du 10 octobre 2016

Durée : 1 heure 15

Question de cours

1. Montrer qu'une variable aléatoire de carré intégrable est intégrable.
2. Donner la définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B.
3. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$. Montrer que la variance de X est inférieure à 1. Exhiber une telle variable dont la variance est *égale* à 1.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, vérifiant $\mathbb{E}X_i = 0$ et $\mathbb{V}(X_i) = 1$.

1. Quelles sont l'espérance et la variance de $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$?
2. Donner une valeur de n à partir de laquelle la variable $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ sera dans l'intervalle $[-0.1, 0.1]$ avec probabilité au moins 90%.

Exercice 3

On considère une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements indépendants. On note $p_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Montrer la relation
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1 - p_k).$$
2. En utilisant la relation $\ln(1 - x) \leq -x$, montrer que si $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} p_k = \infty$, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = 1.$$
3. On suppose que $p_n = 0$ si $n \leq 1$, et que $p_n = \frac{1}{n^2}$ si $n \geq 2$. Montrer
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \frac{1}{2}.$$