Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Probabilités (UE 1)
2015-2016

Interrogation du 10 octobre 2016 : corrigé

Question de cours

1. Pour tout réel x, on a $|x| \leq 1 + x^2$. Par conséquent, pour toute variable aléatoire réelle, on a $|X| \leq 1 + X^2$. En passant à l'espérance (les variables $|X|$ et X^2 sont positives, de sorte que leur espérance a un sens), on obtient :
$$\mathbb{E}|X| \leq 1 + \mathbb{E}(X^2).$$
En particulier, si $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, alors on a également $\mathbb{E}|X| < \infty$: si X est de carré intégrable, alors elle est intégrable.

2. L'espérance conditionnelle de A sachant B, pour un évènement B de probabilité strictement positive, est
$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

3. Pour tous réels $x \geq 0$ et $a > 0$, on a $\mathbf{1}_{x \geq a} \leq \frac{x}{a}$. Par conséquent, pour une variable aléatoire positive X,
$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{X \geq a}\right) \leq \mathbb{E}\left(\frac{X}{a}\right) = \frac{\mathbb{E}X}{a}.$$

Exercice 1

Comme X est à valeurs dans $[-1, 1]$, on a $X^2 \leq 1$. La variance de X vérifie alors
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 \leq \mathbb{E}(X^2) \leq \mathbb{E}(1) = 1.$$
L'inégalité précédente est une égalité si $\mathbb{E}(X^2) = 1$ et $\mathbb{E}X = 0$. Comme $X^2 \leq 1$, on ne peut avoir $\mathbb{E}(X^2) = 1$ que si $\mathbb{P}(X \in \{-1, 1\}) = 1$. Par ailleurs, on veut $0 = \mathbb{E}X = \mathbb{P}(X = 1) - \mathbb{P}(X = -1)$, de sorte que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$. Par conséquent, une variable aléatoire à valeurs dans $[-1, 1]$ est de variance 1 si et seulement si elle est de loi uniforme sur $\{1, -1\}$.

Exercice 2

1. Par linéarité de l'espérance, on a
$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}X_k = 0.$$
Pour la variance, on trouve
$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right).$$
Par ailleurs, par indépendance des X_n, on a
$$\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) = n.$$
On a donc $\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}$.

2. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on trouve
$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \in [-0.1, 0.1]\right) &= \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right| \leq 0.1\right)\\ &\geq 1 - \frac{\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)}{0.1^2}\\ &= 1 - \frac{100}{n}.\end{aligned}$$
Le minorant $1 - \frac{100}{n}$ est supérieur à 0.9 pour $n \geq 1000$.

Exercice 3

1. On a
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k^c\right) = 1 - \prod_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1 - p_k).$$
La première et la troisième égalité découlent de la relation $\mathbb{P}(A^c c) = 1 - \mathbb{P}(A)$. La deuxième découle de l'indépendance des A_k.

2. La relation de la question précédente montre
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=0}^{n}(1 - p_k) = 1 - \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1 - p_k)\right) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} p_k\right).$$
Si $\sum_{k=0}^{n} p_k$ tend vers $+\infty$, alors $1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} p_k\right)$ tend vers 1. Comme par ailleurs, on a $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$, on conclut
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \geq \lim_{n} 1 - \exp\left(\sum_{k=0}^{n} \ln(1 - p_k)\right) = 1.$$

3. On écrit
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \lim_{n} 1 - \prod_{k=0}^{n}(1 - \mathbb{P}(A_k)) = \lim_{n} 1 - \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$
Or
$$\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\frac{k+1}{k} = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k}\right)^{-1}\left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right) = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n}.$$
Ceci tendant vers 1/2, la probabilité de $\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k$ vaut 1/2.