Université Pierre et Marie Curie
M1 MEEF

Analyse (UE 1)
2016-2017

Interrogation du 30 novembre 2016

Durée : 1 heure 30

Question de cours

1. Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Soit f une fonction dérivable de I dans $\mathbb{R}$, où I est un intervalle. Montrer que f est croissante sur I si et seulement si $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 1

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $]0,\infty[$. Montrer la convergence

$$\lim_n \left(\prod_{k=1}^n f(k/n) \right)^{1/n} = \exp\left(\int_0^1 \ln f(t) dt \right).$$

Exercice 2

Calculer la limite en $x \to 0$ de l'expression

$$\frac{e^x - \ln(1+x) - \cos(x)}{\sin(\ln(1+x)) - x}.$$

Exercice 3

On considère la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^\pi \ln(1 - 2x\cos(\theta) + x^2) d\theta.$$

1. Donner les racines du polynôme $X^2 - 2X\cos(\theta) + 1$.
2. Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
3. (a) Montrer que pour $|x| \leq 1/2$, on a $|F(x)| \leq \pi \ln(4)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \notin \{-1, 1\}$, on a $F(x^2) = 2F(x)$. On pourra factoriser le polynôme de la question 1.
   (c) En déduire que F est nulle sur $]-1, 1[$.
4. (a) Donner une relation entre $F(1/x)$ et $F(x)$, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.
   (b) En déduire une expression de $F(x)$ pour $|x| > 1$.