Corrigé de l'interrogation du 30 novembre 2016

Question de cours

Voir polycopié (propriété 4.3.11 et théorème 4.5.5).

Exercice 1

Comme f est continue de $[0,1]$ dans $]0,\infty[$, alors $\ln\circ f$ est continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On a donc la convergence des sommes de Riemann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(f(k/n)) \to \int_0^1 \ln(f(t))dt.$$

En passant à l'exponentielle, on obtient le résultat souhaité.

Exercice 2

On fait des développements limités au numérateur et au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{e^x-\ln(1+x)-\cos(x)}{\sin(\ln(1+x))-x} &= \frac{(1+x+x^2/2)-(x-x^2/2)-(1-x^2/2)+o(x^2)}{\sin(x-x^2/2+o(x^2))-x}\\ &= \frac{3x^2/2+o(x^2)}{(x-x^2/2+o(x^2))-x}\\ &= \frac{3/2+o(1)}{-1/2+o(1)}.\end{aligned}$$

La limite vaut donc -3.

Exercice 3

1. On a $X^2-2X\cos(\theta)+1=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$.
2. Comme les racines de $X^2-2X\cos(\theta)+1$ sont les $e^{\pm i\theta}$, l'expression $\varphi(x,\theta)=1-2x\cos(\theta)+x^2$ ne s'annulle pour aucun $\theta\in[0,\pi]$, si x est dans $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. Comme par ailleurs, on a $\varphi(x,\pi/2)=1+x^2>0$, on déduit par continuité que $\varphi(x,\theta)>0$ pour tout $\theta\in[0,\pi]$. Par conséquent, $\theta\mapsto\ln(\varphi(x,\theta))$ est continue sur $[0,\pi]$, et l'intégrale est donc bien définie.
3. (a) Pour $|x|\le 1/2$, on a l'encadrement

   $$\frac{1}{4}\le(1-|x|)^2=1-2|x|+x^2\le 1-2x\cos(\theta)+x^2\le 1+2|x|+x^2=(1+|x|)^2\le\frac{9}{4}.$$

   Par conséquent, pour tout $\theta\in[0,\pi]$, on a

   $$|\ln(1-2x\cos(\theta)+x^2)|\le\max(|\ln(1/4)|,|\ln(9/4)|)=\ln(4).$$

   On a donc

   $$|F(x)|\le\int_0^\pi \ln(4)d\theta=\pi\ln(4).$$

(b) En utilisant la factorisation de la question 1, on trouve

$$\begin{aligned}
F(x^2) &= \int_0^\pi \ln(1-2x^2\cos(\theta)+x^4)d\theta \\
&= \int_0^\pi \ln\left((x^2-e^{i\theta})(x^2-e^{-i\theta})\right)d\theta \\
&= \int_0^\pi \ln\Big((x-e^{i\theta/2})(x+e^{i\theta/2})(x-e^{-i\theta/2})(x+e^{-i\theta/2})\Big)d\theta \\
&= \int_0^\pi \ln\left((1-2x\cos(\theta/2)+x^2)(1+2x\cos(\theta/2)x+x^2)\right)d\theta \\
&= \int_0^\pi \ln(1-2x\cos(\theta/2)+x^2)d\theta + \int_0^\pi \ln(1+2x\cos(\theta/2)x+x^2)d\theta.
\end{aligned}$$

Les changements de variables $\psi=\theta/2$ et $\omega=\pi-\theta/2$ donnent alors

$$F(x^2) = 2\int_0^{\pi/2} \ln(1-2x\cos(\psi)+x^2)d\psi - 2\int_\pi^{\pi/2} \ln(1-2x\cos(\omega)x+x^2)d\omega = 2F(x).$$

(c) Par récurrence, la relation précédente montre $F(x)=2^{-n}F(x^{2^n})$ pour tout n. Par conséquent, pour $x\in]-1,1[$, pour $n\geq 2$, $|F(x)|\leq 2^{-n}\pi\ln(4)$. Comme $|F(x)|$ est majoré par une suite tendant vers 0, on a $F(x)=0$.

4. (a) On a

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{1}{x}\right) &= \int_0^\pi \ln(1-2x^{-1}\cos(\theta)+x^{-2})d\theta \\
&= \int_0^\pi \ln(x^2-2x\cos(\theta)+1)-\ln(x^2)d\theta \\
&= F(x)-\pi\ln(x^2).
\end{aligned}$$

(b) Pour $|x|>1$, on a $F(x)=\pi\ln(x^2)+F\left(\frac{1}{x}\right)=\pi\ln(x^2)+0$.