Interrogation du 12 décembre 2016

Durée : 1 heure 30

Questions de cours

1. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X de loi binomiale de paramètre (n, p).
2. Montrer que si la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie la relation :
$$\mathbb{P}(X \geq k+n | X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq n)$$
alors X suit une loi géométrique. On pourra calculer $\mathbb{P}(X \geq k)$.
3. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ :
$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k \geq 0.$$

Exercice 1

Soit s un réel. On considère la loi suivante sur $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{c_s}{n^s} \tag{1}$$

1. Pour quelles valeurs de s l'expression (1) définit-elle bien une loi de probabilité ? Quelle est alors la valeur de c_s (on ne cherchera pas à donner une expression explicite) ?
2. Pour quelles valeurs de $k \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire X^k est-elle intégrable ? Dans ce cas, donner l'expression de $\mathbb{E}[X^k]$, en fonction de c_s.
3. Pour d un entier, on note $A_d = \{n \in \mathbb{N}^*, d \text{ divise } n\}$.
   (a) Calculer la probabilité de l'évènement $\{X \in A_d\}$.
   (b) Soient p et q deux entiers premiers entre eux. Montrer que les évènements $\{X \in A_p\}$ et $\{X \in A_q\}$ sont indépendants.

Exercice 2

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $t \in [0, 1]$, on note

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}[t^X].$$

1. Montrer que $\Phi_X(t)$ et bien défini, quels que soient la variable aléatoire X et le réel $t \in [0, 1]$.
2. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors $\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$.
3. Calculer Φ_X dans le cas où X suit la loi de Poisson de paramètre λ.
4. On admet que si $\Phi_X = \Phi_Y$, alors X et Y ont la même loi. Montrer que la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.