Interrogation du 12 décembre 2016 : Corrigé

Exercice 1

1. Il existe une loi de probabilité de la forme $\mu_n = \frac{c}{n^s}$ si et seulement si la série $\sum 1/n^s$ est convergente. C'est le cas si et seulement si $s > 1$. La constante sert à normaliser la masse totale à 1, autrement dit, $c_s = \left(\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s\right)^{-1}$.

2. Comme X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et donc positive, on a

$$\mathbb{E}(|X|^k) = \mathbb{E}(X^k) = c_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{n^s} = c_s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-k}}.$$

La série converge si et seulement si $s - k > 1$, de sorte que X^k est intégrable si et seulement si $k < s - 1$, et dans ce cas, on a

$$\mathbb{E}(X^k) = c_s / c_{s-k}.$$

3. (a) On a

$$\mathbb{P}(X \in A_d) = \sum_{n \in A_d} \frac{c_s}{n^s} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{c_s}{(dk)^s} = \frac{1}{d^s} \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{c_s}{k^s} = \frac{1}{d^s}.$$

   (b) Comme p et q sont premiers entre eux, on a $\{X \in A_p \cap A_q\} = \{X \in A_{pq}\}$, de sorte que

$$\mathbb{P}(X \in A_p, X \in A_q) = \mathbb{P}(X \in A_{pq}) = \frac{1}{(pq)^s} = \mathbb{P}(X \in A_p)\mathbb{P}(X \in A_q).$$

   Les évènements sont bien indépendants.

Exercice 2

1. On a $|t^X| \leq 1$, de sorte que la variable aléatoire t^X est bornée donc intégrable.

2. Si X et Y sont indépendantes, alors t^X et t^Y le sont aussi, et on a donc

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X t^Y] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y] = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

3. Pour X de loi de Poisson de paramètre λ,

$$\mathbb{E}[t^X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} t^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(t\lambda)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{t\lambda}.$$

4. D'après les questions précédentes, si X et Y sont indépendantes et de loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, alors

$$\Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t) = e^{-\lambda + t\lambda} e^{-\mu + t\mu} = e^{-(\lambda+\mu) + t(\lambda+\mu)} = \Phi_Z(t),$$

où Z suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Par la propriété admise, $X + Y$ et Z ont la même loi, ce qui montre le résultat.