Interrogation du 9 février 2017

Durée : 1 heure 30

Exercice 1

Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{(1-x)(1-2x)}$ est développable en série entière. Préciser son développement, avec son rayon de convergence.

Exercice 2

Montrer que l'intégrale

$$\int_0^\infty x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right)dx$$

existe et donner sa valeur.

Exercice 3

Dans cet exercice, on considère une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence 1. Cette série définit une fonction $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ pour $x \in]-1,1[$. On va démontrer que la fonction f est également développable en série entière en *tout* point x_0 de $]-1,1[$. Par symétrie, on peut supposer $x_0 > 0$.

On fixe donc pour le reste de l'exercice $x_0 \in]0,1[$. On va montrer que les coefficients b_n définis par

$$b_n = \sum_{k=n}^\infty \binom{k}{n} a_k x_0^{k-n} \tag{1}$$

sont les coefficients du développement en série entière de f en x_0. Autrement dit, on va montrer l'égalité

$$f(x_0+h) = \sum_{n=0}^\infty b_n h^n,$$

pour h assez petit.

1. Montrer que pour tout $t > 1$, il existe une constante C_t telle que $|a_n| \le C_t t^n$, pour tout entier n.
2. (a) Montrer que pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la série entière $\sum_n \binom{n}{k} x^n$ a un rayon de convergence égal à 1.
   (b) Montrer l'égalité, pour $x \in]-1,1[$ et $k \in \mathbb{N}$ fixés,
   $$\sum_{n=k}^\infty \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$
3. (a) Montrer que la série de l'équation (1) est convergente, de sorte que la définition de b_n a bien un sens.
   (b) Montrer que pour tout $1 < t < 1/x_0$, il existe une constante D_t telle que $|b_n| \le D_t \left(\frac{t}{1-tx_0}\right)^n$.
   (c) En déduire que le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à $1 - x_0$.
4. (a) Montrer l'égalité, pour tout $h \in \mathbb{R}$,
   $$\sum_{n=0}^N b_n h^n - \sum_{n=0}^N a_n (x_0+h)^n = \sum_{k=N+1}^\infty \left(\sum_{n=0}^N \binom{k}{n} a_k x_0^{k-n} h^n\right).$$
   (b) Montrer la majoration, pour $|h| < 1 - x_0$ et $1 < t < 1/(x_0+h)$,
   $$\left|\sum_{k=N+1}^\infty \left(\sum_{n=0}^N \binom{k}{n} a_k x_0^{k-n} h^n\right)\right| \le C_t \sum_{k=N+1}^\infty t^k (x_0+h)^k.$$
   (c) En déduire que pour $|h| < 1 - x_0$, alors
   $$\sum_{n=0}^\infty a_n (x_0+h)^n = \sum_{n=0}^\infty b_n h^n.$$