Interrogation du 9 février 2017 : corrigé

Exercice 1

On a la décomposition en éléments simples

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

En utilisant le développement en série entière de $(1-x)^{-1}$, on trouve donc

$$\frac{x}{(1-x)(1-2x)} = \sum_{n\geq 0} 2^n x^n - \sum_{n\geq 0} x^n = \sum_{n\geq 0} (2^n-1)x^n.$$

On obtient donc la différence de deux séries entières de rayon de convergence respectifs 1/2 et 1. Comme les rayons sont distincts, la série obtenue a pour rayon de convergence 1/2.

Exercice 2

La fonction $x \mapsto x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right)$ est continue sur $[0,\infty[$, il nous suffit donc de montrer qu'elle est intégrable en ∞. Or, on a, en $x \to \infty$

$$\begin{aligned} x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+x^{-2}} - \frac{1}{1+2x^{-2}}\right) &= \frac{1}{x}\Big((1-x^{-2}+o(x^{-2})) - (1-2x^{-2}+o(x^{-2}))\Big) \\ &= x^{-3} + o(x^{-3}). \end{aligned}$$

Comme x^{-3} est intégrable en ∞, c'est également le cas de la fonction $x \mapsto x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right)$.

Pour le calcul de l'intégrale, on écrit

$$\begin{aligned} \int_0^M x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right) dx = \int_0^M \frac{x}{1+x^2}dx - \int_0^M \frac{x}{2+x^2}dx &= \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^M - \left[\frac{1}{2}\ln(2+x^2)\right]_0^M \\ &= \frac{1}{2}\big(\ln(1+M^2) - \ln(2+M^2) + \ln(2)\big) \\ &\underset{M\to\infty}{\to} \frac{1}{2}\ln 2. \end{aligned}$$

On a donc

$$\int_0^\infty x\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2+x^2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Exercice 3

1. Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est égal à 1, pour $t > 1$ la série $\sum a_n (1/t)^n$ est convergente. Par conséquent, la suite a_n/t^n est bornée, par une constante notée C_t. On a donc bien $|a_n| \leq C_t t^n$.

2. (a) Pour k fixé, on a

   $$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}} = \frac{n-k+1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

   Par application du critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $\sum \binom{n}{k} x^n$ est donc de 1.

   (b) On procède par récurrence sur k :

   - Pour $k=0$, on retrouve l'égalité $\sum_{n=0}^\infty x^n = (1-x)^{-1}$.

- Si l'égalité est vraie pour un k donné, alors en dérivant, on obtient d'une part,

$$\left(\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}\right)' = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}(n-k)x^{n-k-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty}\binom{n}{k+1}(k+1)x^{n-k-1}$$

et d'autre part

$$\left(\frac{1}{(1-x)^{k+1}}\right)' = \frac{(k+1)}{(1-x)^{k+2}},$$

ce qui montre l'égalité au rang $k+1$.

3. (a) Comme $x_0 < 1$, il est possible de trouver t avec $x_0 < 1/t < 1$. On a alors, d'après la question 1, $|a_k x_0^k| \leq C_t(tx_0)^k$. Pour montrer que $\sum_k \binom{k}{n} a_k x_0^{k-n}$ converge, il suffit donc de montrer que $\sum_k \binom{k}{n}(tx_0)^k$ converge. Or $|tx_0| < 1$, et on a montré en (2a) que le rayon de convergence de $\sum_k \binom{k}{n} x^k$ est de 1.

   (b) Soit $1 < t < 1/x_0$. On a

$$|b_n| = \left|\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}\right| \leq \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}C_t t^k x_0^{k-n} = C_t t^n \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}(tx_0)^{k-n} = \frac{C_t t^n}{(1-tx_0)^{n+1}}.$$

   Il suffit donc de poser $D_t = \frac{C_t}{1-tx_0}$.

   (c) D'après la question précédente, pour tout $1 < t < 1/x_0$, le rayon de convergence $\sum b_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1-tx_0}{t}$ (pour $\alpha > 0$, le rayon de convergence de $\sum \alpha^n x^n$ est supérieur ou égal à $1/\alpha$). Comme t peut tre choisi arbitrairement proche de 1, on obtient que le rayon de convergence est supérieur à $\lim_{t\to 1}\frac{1-tx_0}{t} = 1 - x_0$.

4. (a) Pour tout $h \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$, on a,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} a_n(x_0+h)^n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_n x_0^{n-k}h^k &= \sum_{k=0}^{N}\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}h^n \\ &= \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}h^n\end{aligned}$$

   et

$$\sum_{n=0}^{N} b_n h^n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=n}^{\infty}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}h^n,$$

   d'où le résultat.

   (b) On a, $|h| < 1 - x_0$ et $1 < t < 1/(x_0+h)$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}h^n\right)\right| &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{k}{n}x_0^{k-n}h^n\right) \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|\left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}x_0^{k-n}h^n\right) \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty}|a_k|(x_0+h)^k \\ &\leq C_t\sum_{k=N+1}^{\infty}t^k(x_0+h)^k.\end{aligned}$$

   (c) D'après la question (4a), la différence entre $\sum_{n=0}^{N} a_n(x_0+h)^n$ et $\sum_{n=0}^{N} b_n h^n$ est donnée par $\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{N}\binom{k}{n}a_k x_0^{k-n}h^n\right)$, qui a été majoré à la question précédente par $C_t\sum_{k=N+1}^{\infty}t^k(x_0+h)^k$. Ce terme tend vers 0 quand N tend vers l'infini (reste de série convergente), ce qui permet de conclure.